Corrigé DS3

Exercice 1 : Mouvement dans un champ magnétique

1. On évalue en ordres de grandeur le poids et la force magnétique : $P = mg \sim 10^{-29}\,\mathrm{N}$ et $F_m = \left\|-e\vec{v}\wedge\vec{B}\right\| \sim evB_0 \sim 10^{-17}\,\mathrm{N}$.
On a $F_m/P \sim 10^{12}$; **le poids de l'électron est négligeable devant la force magnétique**.

2. La force magnétique ne travaille pas car $\mathscr{P}_{\mathrm{mag}} = \vec{F}_{\mathrm{mag}}\cdot\vec{v} = -e(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v} = 0$. On applique le théorème de la puissance cinétique à l'électron : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}_{\mathrm{mag}} = 0$. L'énergie cinétique se conserve donc le mouvement est uniforme.

3. Avec une vitesse initiale colinéaire à $\vec{u}_z$ (donc à $\vec{B}$) la force magnétique **est nulle**. L'électron a un mouvement **rectiligne uniforme parallèlement au champ magnétique** (selon $\vec{u}_z$)

4.a) On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{v}\wedge\vec{B}$. On projette dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{eB_0}{m}v_y & (E_x) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{eB_0}{m}v_x & (E_y) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 & (E_z) \end{cases}$$

4.b) En intégrant deux fois l'équation (E_z) avec les conditions initiales $v_z(0) = 0$ et $z(0) = 0$ on trouve $\boxed{z(t) = 0\ \forall t}$. **La trajectoire est située dans le plan** (Oxy).

4.b) On dérive l'équation (E_x) par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{eB_0}{m}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 v_x \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 v_x = 0}$$

On dérive l'équation (E_y) par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{eB_0}{m}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 v_y \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 v_y = 0}$$

Les vitesses $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont solutions de la même équation différentielle d'oscillateur harmonique. On identifie la pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{eB_0}{m}}$.
On intègre à nouveau pour obtenir $x(t)$ et $y(t)$, avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$. On trouve :

$$\boxed{x(t) = \frac{mv_0}{eB_0}\sin\left(\frac{eB_0}{m}t\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y(t) = \frac{mv_0}{eB_0}\left(1-\cos\left(\frac{eB_0}{m}t\right)\right)}$$

On élimine le temps grâce à l'identité $\cos^2+\sin^2 = 1$: $\boxed{x^2 + \left(y - \dfrac{mv_0}{eB_0}\right)^2 = \left(\dfrac{mv_0}{eB_0}\right)^2}$. Il s'agit de l'équation cartésienne d'un **cercle** de rayon $\boxed{R_c = \dfrac{mv_0}{eB_0}}$ et de centre $C(0, R_c)$. D'après les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ la pulsation du mouvement est $\omega_c = eB_0/m$ donc la période vaut $\boxed{T_c = \dfrac{2\pi}{\omega_c} = \dfrac{2\pi m}{eB_0}}$.

5.a) On exprime l'énergie cinétique en fonction du rayon : $E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \dfrac{e^2B_0^2}{2m}R_c^2$. On dérive cette expression :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{cin}}}{\mathrm{d}R_c} = \frac{e^2B_0^2}{m}R_c \iff \boxed{\mathrm{d}E_{\mathrm{cin}} = \frac{e^2B_0^2}{m}R_c\mathrm{d}R_c}$$

5.b) On applique le théorème de la puissance cinétique à l'électron :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{cin}}}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{P} \iff \frac{e^2B_0^2}{m}R_c\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right\|^2$$

On suppose que le mouvement reste quasiment circulaire uniforme donc l'accélération en norme vaut : $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right\| \simeq \dfrac{v^2}{R_c} = \dfrac{e^2B_0^2}{m^2}R_c$. On vérifie alors que le théorème de la puissance cinétique conduit à l'équation différentielle suivante : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{e^4B_0^2}{6\pi\varepsilon_0m^3c^3}R_c = 0}$.

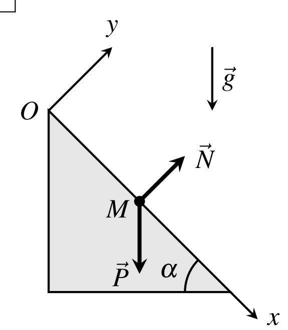
5.c) On reconnaît l'équation caractéristique d'un régime transitoire du premier ordre de constante de temps $\tau = \dfrac{6\pi\varepsilon_0m^3c^3}{e^4B_0^2}$. Sachant que $m = eB_0/\omega_c$ on a : $\boxed{\tau = \dfrac{6\pi\varepsilon_0c^3B_0}{e\omega_c^3}}$. On résout cette équation différentielle avec la condition initiale $R_c(0) = \dfrac{mv_0}{eB_0}$: $\boxed{R_c(t) = \dfrac{mv_0}{eB_0}\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

À cause de l'énergie perdue par le rayonnement qu'il produit, l'électron suit une trajectoire en forme de **spirale convergente** et finit par s'arrêter en O dans la limite $t \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2 : Mouvement d'une luge

1. Par définition : $\tan\alpha = \dfrac{10}{100} = 0,1 \iff \boxed{\alpha = \arctan(0,1) = 5,7^\circ}$.

2. On définit un repère (Oxy) dont l'origine est située à la fin de la phase de poussée. La luge est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$ de la piste (les frottements sont négligés). On applique le principe fondamental de la dynamique à la luge dans le référentiel lié à la piste supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P}+\vec{N}$. On projette dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$:



$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha & (E_x) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N & (E_y) \end{cases}$$

L'équation (E_x) donne l'accélération de la luge : $\boxed{\ddot{x} = g\sin\alpha = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$.

3. On intègre (E_x), avec la conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$: $\boxed{\dot{x}(t) = g\sin(\alpha)t + v_0}$.

La luge atteint la vitesse v_a lorsque : $v_a = g\sin(\alpha)t_a + v_0 \iff \boxed{t_a = \frac{v_a - v_0}{g\sin\alpha} = 25\,\mathrm{s}}$.

4. On intègre à nouveau pour obtenir la position.
Avec la condition initiale $x(0) = 0$ on trouve $x(t) = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2 + v_0 t$.

La distance parcourue par la luge avant d'atteindre la vitesse v_a vaut : $\boxed{L_a = x(t_a) = 440\,\mathrm{m}}$.

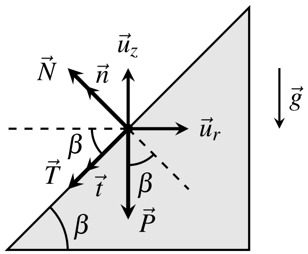
5. On applique le théorème de l'énergie cinétique à la luge entre O et le point A où la vitesse atteint v_a : $\Delta_{O\to A}E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{N})$.

- La variation d'énergie cinétique vaut : $\Delta_{O\to A}E_c = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$.
- Le travail du poids vaut $W(\vec{P}) = mgh$ avec $h = L_a\sin\alpha$ le dénivelé entre O et A.
- La réaction normale ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement : $W(\vec{N}) = 0$.

On conclut que : $\frac{1}{2}m(v_a^2 - v_0^2) = mgL_a\sin\alpha \iff \boxed{L_a = \frac{v_a^2 - v_0^2}{2g\sin\alpha} = 440\,\mathrm{m}}$. On retrouve bien le résultat de la question 4.

6. Le mouvement de la luge est circulaire et uniforme donc $\boxed{\vec{a} = -\frac{V^2}{r}\vec{u}_r}$. Un vecteur accélération est toujours tourné vers l'intérieur de la trajectoire, on comprend que $\vec{a}$ peut être orienté selon $-\vec{u}_r$.

7. On représente les forces sur le schéma ci-contre.
On applique le principe fondamental de la dynamique à la luge : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$. On le projette dans la base $(\vec{n}, \vec{t})$:



$$\begin{cases} m\frac{V^2}{r}\sin\beta = N - mg\cos\beta \\ m\frac{V^2}{r}\cos\beta = T + mg\sin\beta \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{N = mg\cos\beta + m\frac{V^2}{r}\sin\beta}$ et $\boxed{T = m\frac{V^2}{r}\cos\beta - mg\sin\beta}$.

8. La réaction tangentielle est nulle pour la vitesse V_c telle que :

$$m\frac{V_c^2}{r}\cos\beta = mg\sin\beta \iff \boxed{V_c = \sqrt{gr\tan\beta}}$$

Dans le cas général on peut écrire : $T = m\frac{V^2}{r}\cos\beta - m\frac{V_c^2}{r}\cos\beta \iff \boxed{T = m\frac{V^2 - V_c^2}{r}\cos\beta}$.

9. Si $V > V_c$ alors $T > 0$. la condition de non-dérapage s'écrit :

$$m\frac{V^2}{r}\cos\beta - mg\sin\beta \leq f\left(mg\cos\beta + m\frac{V^2}{r}\sin\beta\right)$$

Après simplifications on trouve : $\boxed{V^2(\cos\beta - f\sin\beta) \leq gr(\sin\beta + f\cos\beta)}$.

10. La condition établie à la question précédente est vérifiée quelle que soit la vitesse V si :

$$\cos\beta - f\sin\beta \leq 0 \iff \tan\beta \geq \frac{1}{f} \iff \boxed{\beta \geq \arctan\left(\frac{1}{f}\right) = 68^\circ}$$

11. Si $\cos\beta - f\sin\beta \geq 0$ alors la condition de non-dérapage impose que la vitesse vérifie :

$$\boxed{V \leq \sqrt{gr\frac{\sin\beta + f\cos\beta}{\cos\beta - f\sin\beta}}}$$

Si la vitesse est trop grande alors la luge peut déraper et percuter la bordure extérieure de la piste. Sachant qu'elle descend à grande vitesse, cela représente un danger sérieux pour le lugeur.

12. La luge ne dérape pas si son mouvement est circulaire uniforme, c'est-à-dire si $\vec{a} = -\frac{V^2}{r}\vec{u}_r$.
On projette le PFD dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$, dans le cas d'absence de frottement latéral $(T = 0)$:

$$\begin{cases} -m\frac{V^2}{r} = -N\sin\beta \\ 0 = N\cos\beta - mg \end{cases}$$

Le virage s'effectue sans dérapage à condition que $N = \frac{mg}{\cos\beta}$ et :

$$V = \sqrt{\frac{Nr}{m}\sin\beta} = \sqrt{gr\tan\beta} = V_c$$

En l'absence de frottement latéral le virage ne s'effectue sans dérapage qu'à condition que la vitesse soit **exactement** égale à V_c.

13. La luge est soumise à son poids (force conservative) et à la réaction normale de la piste. On applique le théorème de l'énergie mécanique à la luge entre la ligne d'arrivée (point A) et la position d'arrêt (point B) : $\Delta_{A\to B}E = W(\vec{N}) = 0$. **L'énergie mécanique se conserve** au cours de la décélération.
On note $E_p = mgz$ l'énergie potentielle de pesanteur, avec z l'altitude de la luge. On choisit $z = 0$ au niveau de la ligne d'arrivée. La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$E(A) = E(B) \iff \frac{1}{2}mv_a^2 = mgz_B \iff z_B = \frac{v_a^2}{2g}$$

On en déduit la distance de freinage : $\boxed{L_f = \frac{z_B}{\sin\alpha} = \frac{v_a^2}{2g\sin\alpha} = 452\,\mathrm{m}}$.

Une zone de freinage d'une telle longueur n'est pas envisageable en pratique. Il est nécessaire de trouver un moyen de freiner plus efficacement la luge.