DS de physique n°3

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et ***les résultats soulignés ou encadrés****. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 2 exercices indépendants.*

Exercice 1 : Mouvement dans un champ magnétique

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on considère un électron de masse m pénétrant en O (origine d'un repère cartésien $Oxyz$) dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ stationnaire et uniforme ($B_0 > 0$).

1. Le poids a-t-il une influence sur la dynamique de l'électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur. On considère un champ magnétique $B \sim 10^{-5}\,\mathrm{T}$ et une vitesse $v \sim 10^7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2. Montrer que le mouvement de l'électron est uniforme dans la zone magnétique.

3. On suppose que la vitesse initiale de l'électron s'écrit $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$. Décrire le mouvement de l'électron.

4. On suppose désormais que l'électron pénètre à $t = 0$ dans cette même zone de champ magnétique avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ ($v_0 > 0$). On note $\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$ le vecteur vitesse à un instant quelconque. On pose $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$.

a) Établir les équations différentielles du premier ordre vérifiées par $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$.

b) Déterminer $z(t)$ à tout instant $t > 0$.

c) Déterminer $x(t)$ et $y(t)$ à tout instant $t > 0$ puis montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire. Préciser quel le centre C, le rayon R_c et la période T_c de la trajectoire.

5. Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique $\mathscr{P} = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right\|^2$ avec e la charge élémentaire et c la célérité de la lumière dans le vide. Sous l'effet de la puissance rayonnée la vitesse $\|\vec{v}\|$ et le rayon R_c de la trajectoire deviennent variables. On étudie une portion infinitésimale de la trajectoire de l'électron au cours de laquelle le rayon varie de $\mathrm{d}R_c$. On suppose que le rayon R_c varie suffisamment lentement pour que les expressions obtenues à la question 4.c) soient toujours valables en première approximation.

a) Exprimer la variation de l'énergie cinétique $\mathrm{d}E_{\mathrm{cin}}$ de l'électron en fonction de $\mathrm{d}R_c$.

Indication : On pourra commencer par calculer la dérivée $\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{cin}}}{\mathrm{d}R_c}$.

b) En déduire, à l'aide du théorème de la puissance cinétique, que $R_c(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}R_c}{\mathrm{d}t} + \frac{e^4 B_0^2}{6\pi\varepsilon_0 m^3 c^3} R_c = 0$$

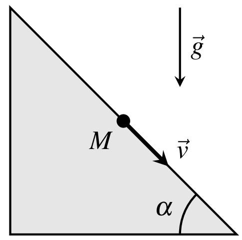
c) Résoudre cette équation. Quelle est l'allure de la trajectoire ?

Exercice 2 : Mouvement d'une luge

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé sur le dos, les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge + lugeur} (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100\,\mathrm{kg}$. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Partie 1 : Descente rectiligne



Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces mises en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

1. Calculer α.

2. Par application du principe fondamental de la dynamique, exprimer l'accélération de la luge en fonction de g et α. Application numérique.

3. L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée la luge atteint-elle la vitesse $v_a = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? Application numérique.

4. Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Application numérique.

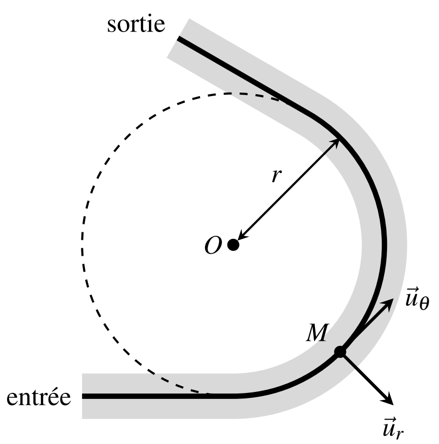
5. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Partie 2 : Virage circulaire

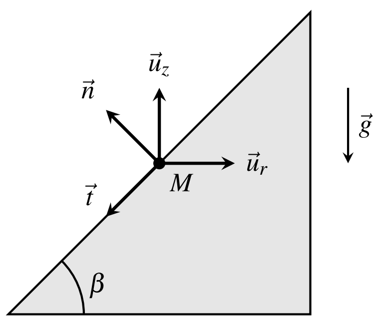
À présent le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon r. La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

La trajectoire se situe dans un plan horizontal : $\vec{v} = V\vec{u}_\theta$. Le trièdre formé des vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct.

On désigne par $\vec{R} = N\vec{n} + T\vec{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires $\vec{u}_n$ (normal) et $\vec{u}_t$ (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

6. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de V, r et $\vec{u}_r$. Justifier physiquement le sens de l'accélération.

7. La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, exprimer N et T en fonction de V, r, β, g et m.

8. Quelle est la valeur V_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Écrire alors T en fonction de m, r, β et $(V^2 - V_c^2)$.

Soit $f = 0,4$ le coefficient de frottement solide latéral entre la luge et la piste de glace. Les lois du frottement indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|T| \leq fN$. Dans la suite des questions, on considère uniquement le cas $V \geq V_c$, ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

9. Montrer que V^2 doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2(\cos\beta - f\sin\beta) \leq gr(\sin\beta + f\cos\beta)$$

10. En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V. Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f. Faire l'application numérique, en degrés.

11. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse V à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g, r, β et f. Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?

12. Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c. Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.

Partie 3 : Freinage de la luge

La luge franchit la ligne d'arrivée à la vitesse $v_a = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Dans cette partie les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu.

Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de 10% (on monte de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On note l'angle d'inclinaison α. Déterminer la longueur L de la piste de ralentissement nécessaire pour que la luge passe de $v_a = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à l'arrêt, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique. Faire l'application numérique et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.