Correction du DNS 14

EXERCICE 1

Pour tout réel x, $x^2 - x^3 = x^2(1-x)$ est du signe de $1-x$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ est donc définie sur $D =]-\infty, 1]$. Elle est continue sur D et dérivable sur $D \setminus \{0, 1\}$ d'après les théorèmes sur les opérations (on ne sait pas si f est dérivable en 0 et en 1 car $x^2 - x^3$ s'annule en ces points et $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0).

Étude en 0 : pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x} = \dfrac{|x|\sqrt{1-x}}{x}$ donc

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

La fonction f est donc dérivable à gauche et à droite en 0, mais $f'_g(0) = -1$ alors que $f'_d(0) = 1$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Étude en 1 : pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x - 1} = \frac{x\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \to 1} -\infty$$

donc la fonction f n'est pas dérivable en 1.

EXERCICE 2

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes sur les opérations.

Par les croissances comparées on a

$$\lim_{x \to 0} x^2 \ln|x| = 0$$

donc f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \ln|x| = 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Continuité de f' en 0 : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 2x \ln|x| + x \xrightarrow{x \to 0} 0 = f'(0)$$

donc f' est continue en 0 (la dérivée de $\ln|x|$ est $\dfrac{1}{x}$ et non $\dfrac{1}{|x|}$).

Par conséquent la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité de f' en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} (2 \ln|x| + 1) = -\infty$$

donc f' n'est pas dérivable en 0 et la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

1) Posons $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$ pour tout réel $x \neq -a$. En calculant les premières dérivées de f (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$), on est amené à conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \neq -a$, on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

Démontrons-le par récurrence.

Pour $n = 0$ c'est immédiat :

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x+a} = \frac{(-1)^0 0!}{(x+a)^{0+1}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ pour tout réel $x \neq -a$. Alors

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = -\frac{(-1)^n n!(n+1)(x+a)^n}{(x+a)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+a)^{n+2}}$$

pour tout réel $x \neq -a$.

Le théorème de récurrence permet de conclure.

2) La dérivée de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$:

$$\ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

EXERCICE 4

1) On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ c'est une conséquence du 1).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(nx) = nf(x)$. Alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Par le théorème de récurrence, on a donc bien $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On peut en fait monter que f est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$.

Ainsi, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(nx) = f(-(-n)x) = -f(-nx) = nf(x)$ car $-n \in \mathbb{N}$.

On a donc bien $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). Alors $f(px) = pf(x)$ et $f(px) = f(qrx) = qf(rx)$, donc $f(rx) = \dfrac{p}{q}f(x) = rf(x)$.

5) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite de rationnels qui converge vers x. Alors $f(x_n y) = x_n f(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or on a, d'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n y = xy$ donc, par continuité de f, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n y) = f(xy)$ et, d'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n f(y) = xf(y)$, donc, par unicité de la limite, on a $f(xy) = xf(y)$.

6) Posons $a = f(1)$. Alors d'après la question précédente on a $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7) Posons $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $g(x+y) = a(x+y) = ax + ay = g(x) + g(y)$.