Devoir n°17 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle **commutant de** A l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid AM = MA\}.$$

1) a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaison linéaire, i.e. que si $M, N \in \mathcal{C}(A)$ et $\alpha, \beta \in K$ alors $\alpha M + \beta N \in \mathcal{C}(A)$.

b) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est stable par le produit matriciel, i.e. que si $M, N \in \mathcal{C}(A)$ alors $MN \in \mathcal{C}(A)$.

c) Montrer que si A est inversible, alors $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^{-1})$.

2) Exemples : déterminer le commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ -2 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

b) Calculer $D = P^{-1}AP$.

c) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $N \in \mathcal{C}(D)$.

d) Déterminer $\mathcal{C}(D)$ et en déduire $\mathcal{C}(A)$.

EXERCICE 2

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est **nilpotente** s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de** A, et on note $\operatorname{ind}(A)$, le plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

1) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes et déterminer leurs indices de nilpotence.

2) Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

3) Soient A et B deux matrices nilpotentes.

a) Montrer que si A et B commutent, alors AB est nilpotente, et que $\operatorname{ind}(AB) \leqslant \min(\operatorname{ind}(A), \operatorname{ind}(B))$.

b) Montrer que si A et B commutent, alors $A + B$ est nilpotente, et que $\operatorname{ind}(A + B) \leqslant \operatorname{ind}(A) + \operatorname{ind}(B) - 1$.

c) Montrer par un contre-exemple que si A et B ne commutent pas, AB et $A + B$ ne sont pas nécessairement nilpotentes.

4) a) Montrer que si une matrice triangulaire supérieure est nilpotente, alors ses coefficients diagonaux sont nuls.

Réciproquement, soit $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $t_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice T^p.

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $t_{i,j}^{(p)} = 0$ lorsque $j \leqslant i + p - 1$. On pourra raisonner par récurrence et utiliser la définition du produit matriciel.

c) En déduire que T est nilpotente.