Fiche d'exercices : Polynômes

Exercice 1 Déterminer les réels a et b tels que $X^4+2aX^3+bX^2+2X+1$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 Effectuer la division euclidienne de $X^5+2X^4+3X^2+X+4$ par X^2+3X+1.

Exercice 3 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que $X^4+X^3+aX^2+bX+2$ soit divisible par X^2+2. Effectuer alors la division.

Exercice 4 Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X-1$, puis par X^2-3X+2, puis par $(X-1)^2$.

Exercice 5 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X\sin\theta+\cos\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 6 Soit $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-3&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$.

1) Trouver un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)=0$. En déduire A^{-1}.

2) Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par P et en déduire A^n.

Exercice 7 Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n\in K$ deux à deux distincts. Soient $b_1,b_2,\ldots,b_n\in K$.

1) Soit $i\in\{1,\ldots,n\}$. Déterminer un polynôme $L_i\in K_{n-1}[X]$ tel que $L_i(a_i)=1$ et $L_i(a_j)=0$ si $j\neq i$.

2) En déduire qu'il existe un polynôme $P\in K_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $P(a_i)=b_i$.

3) Démontrer qu'un tel polynôme est unique.

Exercice 8 Montrer que, quels que soient p, q, r, $s\in\mathbb{N}$, $X^{4p+3}+X^{4q+2}+X^{4r+1}+X^{4s}$ est divisible par X^3+X^2+X+1.

Exercice 9

1) Montrer que, quels que soient p, q, $r\in\mathbb{N}$, $X^{3p}+X^{3q+1}+X^{3r+2}$ est divisible par X^2+X+1.

2) Montrer que si n n'est pas divisible par 3, alors $X^{2n}+X^n+1$ est divisible par X^2+X+1.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 11 Déterminer a et b pour que $aX^{n+1}+bX^n+1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 12 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^5+4X^4+13X^3+25X^2+22X+7$.

Exercice 13 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $3X^4-19X^3+9X^2-19X+6$.

Exercice 14 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes X^4+X^2+1 et X^4+1.

Exercice 15 Soit $P=X^4+2X^3+3X^2+aX+b$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que $1+i$ soit une racine de P. Décomposer alors P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 Décomposer le polynôme $P=X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. On pourra commencer par calculer $P(j)$.

Exercice 17 Déterminer les racines de $P=8X^3-12X^2-2X+3$ sachant qu'elles sont en progression arithmétique.

Exercice 18

1) Factoriser le polynôme $P=1+X+X^2+X^3+X^4$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Transformer l'écriture de $P(x)$ à l'aide du changement de variable $y=x+\dfrac{1}{x}$.

3) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 19 Déterminer les polynômes $P\in K[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$.

Exercice 20 Déterminer les polynômes $P\in K[X]$ tels que $P\circ P=P$.

Exercice 21 Déterminer les polynômes $P\in K[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 22 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que si P est scindé, alors P' aussi.

Exercice 23 Montrer que le polynôme $P=1+X+\dfrac{X^2}{2!}+\dfrac{X^3}{3!}+\ldots+\dfrac{X^n}{n!}$ a une seule racine réelle lorsque n est impair, et aucune lorsque n est pair.

Exercice 24

1) Déterminer les racines de $P=(X+1)^n-e^{2in\theta}$, où $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

2) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.

Exercice 25 Décomposer $\dfrac{1}{X^4-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 26 Soient $P\in K[X]$ et $Q=(X-x_1)\ldots(X-x_n)$ où $x_1,\ldots,x_n\in K$ sont deux à deux distincts. Montrer que le coefficient de $\dfrac{1}{X-x_i}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$ est $\dfrac{P(x_i)}{Q'(x_i)}$. Appliquer ce résultat à $\dfrac{1}{X^3-X}$.

Exercice 27 Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ et $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.