

## Corrigé DS4

### Exercice 1 : Microscope à force atomique en mode oscillant

1. On effectue une analyse dimensionnelle de la relation entre la flèche  $z$  et la force  $F_{\text{ext}}$  :

$$L = \frac{L^3}{[E]L^4} [F] \iff [E] = \frac{[F]}{L^2}$$

Le module d'Young est homogène à une force surfacique, autrement dit à une **pression**.

2. Notons  $\vec{F}_{\text{rappel}}$  la contrainte qui agit sur le système levier-pointe lorsque celui-ci est déformé. En présence de la force  $\vec{F}_{\text{ext}}$  le système atteint un état d'équilibre caractérisé par (première loi de Newton) :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} + \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \iff \vec{F}_{\text{rappel}} = -\vec{F}_{\text{ext}} = -\frac{Eae^3}{4L^3} z \vec{u}_z$$

Cette force est semblable à la force de rappel exercée par un ressort élastique de longueur à vide nulle et de raideur  $k = \frac{Eae^3}{4L^3}$ . L'application numérique donne  $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

3. Le système levier-pointe est soumis à la force de rappel  $\vec{F}_{\text{rappel}}$  dont on suppose que l'expression reste valable hors équilibre et à la force de frottement  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ .

On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse  $m$  équivalente dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :  $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f}$ . On projette sur  $\vec{u}_z$  :

$$\ddot{z} = -kz - \alpha \dot{z} \iff \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

Par identification on trouve  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ .

4. L'équation différentielle est homogène. L'hypothèse d'un amortissement faible revient à dire que  $Q \gg 1$ . On écrit l'équation caractéristique :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ .

Le discriminant vaut  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0$  et les deux racines sont :  $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ .

Puisque  $Q \gg 1$  on peut faire l'approximation suivante :  $r_{1,2} \simeq -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0$ . La solution de l'équation s'écrit sous la forme :

$$z(t) \simeq \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

On détermine les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  avec les conditions initiales  $z(0) = z_0$  et  $\dot{z}(0) = 0$  (pas de vitesse initiale) :

$$\begin{cases} A = z_0 \\ -\frac{\omega_0}{2Q} A + \omega_0 B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = z_0 \\ B = \frac{z_0}{2Q} \end{cases}$$

On constate que  $|B| \ll |A|$ , on peut donc négliger le terme  $B \sin(\omega_0 t)$ . On conclut que :

$$z(t) \simeq z_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \cos(\omega_0 t)$$

5. On reprend le principe fondamental de la dynamique projeté sur  $\vec{e}_z$ , en ajoutant cette fois-ci la force excitatrice :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha \dot{z} + F_m \cos(\omega t) \iff \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = A \cos(\omega t)$$

6. On passe l'équation différentielle dans l'espace complexe :

$$(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) Z_0 = A \iff Z_0 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

On calcule le module de cette amplitude complexe :

$$|Z_0| = \left| \frac{\frac{A}{\omega_0^2}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \right| \iff \frac{\frac{A}{\omega_0^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Par identification on trouve  $Z_m = \frac{A}{\omega_0^2} = \frac{F_m}{k}$ .

7. Le déplacement  $z(t)$  du système entre en résonance si l'amplitude réelle des oscillations  $|Z_0|(\omega)$  est maximale pour  $\omega \in ]0, +\infty[$ , autrement dit si le dénominateur est minimal. On étudie les variations de la fonction  $f : x \mapsto (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ .

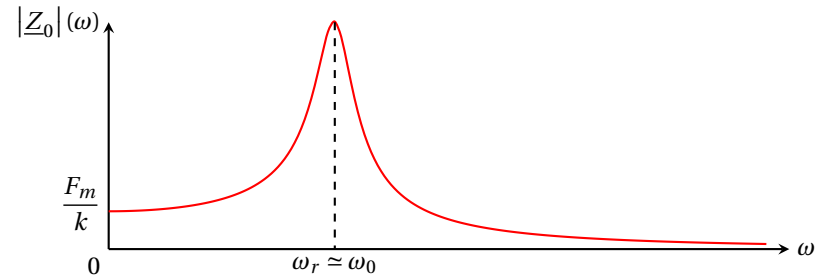
$$f'(x) = 0 \iff 2(-2x)(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0 \iff 2x \left[ 2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \right] = 0$$

On exclut le cas  $x = 0$ . Il reste :

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \iff \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette pulsation de résonance est définie à condition que  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \iff Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

8. Dans le cas d'un amortissement faible on a  $\omega_r \simeq \omega_0$  et la résonance est aiguë.



9. On applique à nouveau le principe fondamental de la dynamique en ajoutant la force d'interaction entre le système et la surface :

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha \dot{z} + F_m \cos(\omega t) + F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) + (z - z_{\text{eq}}) \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$$

$$\iff \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \left( \omega_0^2 - \frac{1}{m} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} \right) z = F_m \cos(\omega t) + F_{\text{int}}(z_{\text{eq}}) - z_{\text{eq}} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}}$$

On identifie une nouvelle pulsation propre dans le membre de gauche :

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{m} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{m\omega_0^2} \left. \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \right|_{z_{\text{eq}}} \right)$$

Sachant que  $k = m\omega_0^2$  on trouve finalement  $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{k} \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \Big|_{z_{\text{eq}}}}$ .

10. D'après la figure 2 :  $d(z) = d_0 - z$  donc :

$$F_{\text{int}}(z) = \frac{HR}{6(d_0 - z)^2} \iff \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \Big|_{z_{\text{eq}}} = \frac{HR}{3(d_0 - z_{\text{eq}})^3}$$

11. Le résultat de la question 9 conduit à :

$$\frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k} \frac{dF_{\text{int}}}{dz} \Big|_{z_{\text{eq}}}} \iff \frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1 + \sqrt{1 - \frac{HR}{3k(d_0 - z_{\text{eq}})^3}}$$

On prend  $d_0 - z_{\text{eq}} = 10 \text{ nm}$  pour effectuer l'application numérique :  $\frac{\Omega_0 - \omega_0}{\omega_0} = -1,2 \cdot 10^{-6}$ . Le décalage relatif est négatif donc il se produit **vers les basses fréquences**.

## Exercice 2 : Traitement d'un signal

1. Au vu du graphe de la figure 2, on peut estimer à **environ 10 mV** la valeur moyenne du signal.

2. On voit qu'un même motif se répète avec une période  $T = 3,1 \text{ ms}$ . Cela correspond à une fréquence  **$f = 1/T = 3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$** .

3. Au vu des valeurs données dans le tableau 1, on peut penser qu'il s'agit de la corde de **Mi aigu** (si elle est jouée à vide, c'est-à-dire sans être pincée).

4. Le signal enregistré par le microphone est **de valeur moyenne non nulle** ; il possède donc une composante continue. Il **n'est pas sinusoïdal** donc son spectre présentera forcément des harmoniques.

5. En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la tension aux bornes de  $R$  est nulle car le courant est nul :  $s(t) = 0$  en BF.

En HF, le condensateur est équivalent à un fil :  $s(t) = e(t)$  en HF. Ce filtre atténue les basses fréquences et transmet les hautes fréquences, il s'agit d'un **passé-haut**.

6. On applique la loi du pont diviseur de tension :

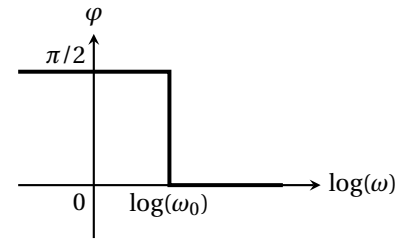
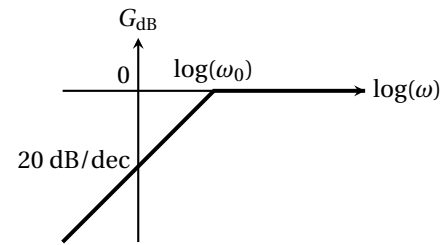
$$\underline{H}_1 = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jR_1C_1\omega}}$$

On reconnaît la forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre. On identifie la pulsation de coupure :  **$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$** . La fréquence de coupure vaut  **$f_1 = \frac{1}{2\pi R_1C_1} = 15,9 \text{ Hz}$** .

7. On simplifie la fonction de transfert en BF et HF :

$$\begin{cases} \text{BF} (\omega \ll \omega_1) & \underline{H} \simeq \frac{j\omega}{\omega_1} \implies G_{\text{dB}} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_1 \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \text{HF} (\omega \gg \omega_1) & \underline{H} \simeq 1 \implies G_{\text{dB}} = 0 \text{ et } \varphi = 0 \end{cases}$$

On trace l'allure du diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase.



8. On a  $f = 320 \text{ Hz}$  et  $f_1 = 15,9 \text{ Hz}$  donc  $f_1 \ll f$ . On en déduit que :

- La composante continue du signal d'entrée ( $f = 0$ ) se situe en dehors de la bande passante, elle est coupée.
- La partie variable du signal est dans la bande passante donc elle est transmise sans atténuation.

On conclut que **ce filtre sert à supprimer la composante continue du signal**.

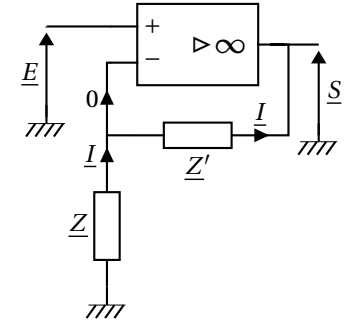
9. On rappelle que pour un ALI idéal en régime linéaire :

$\underline{V}_+ = \underline{V}_-$  et  $\underline{I}_+ = \underline{I}_- = 0$ . On remarque qu'ici :  $\underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{E}$ .

On applique la loi des nœuds au niveau de l'entrée inverseuse :  $\underline{I} = \frac{-\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E} - \underline{S}}{\underline{Z}'}$ . Après simplification, on trouve :

$$\underline{\underline{H}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$$

10. Dans le cas où les deux impédances sont des résistances, on obtient :  **$\underline{\underline{H}} = 1 + \frac{R'}{R}$** .



Le montage est alors un **amplificateur non-inverseur, son rôle consiste à amplifier le signal**.

11. L'impédance équivalente vaut :  **$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$** .

12. La fonction de transfert vaut :  **$\underline{H}_2 = 1 + \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R_3} = 1 + \frac{R_2}{R_3(1 + jR_2C_2\omega)}$** .

13. La fonction de transfert est déjà sous la forme attendue, avec :  **$G_0 = \frac{R_2}{R_3}$**  et  **$\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$** .

14. En basse fréquence ( $\omega \ll \omega_2$ ) :  **$\underline{H} \simeq 1 + G_0$** . En haute fréquence ( $\omega \gg \omega_2$ ) :  **$\underline{H} \simeq 1$** .

15. Numériquement, on a :  **$f_2 = \frac{1}{2\pi R_2C_2} = 498 \text{ Hz}$**  et  **$G_0 = 113$** .

La fréquence caractéristique  $f_2$  est comprise entre la fréquence fondamentale du signal enregistré par le microphone et celle de l'harmonique de rang 2. Par conséquent le gain est quasiment égal à  $G_0$  pour le fondamental tandis qu'il décroît dès le premier harmonique pour tendre vers 1 en haute fréquence. **Ce filtre amplifie principalement la composante fondamentale du signal pour renforcer son poids dans le spectre par rapport aux harmoniques.**

16. L'entrée de ce filtre est directement connectée à l'entrée non-inverseuse de l'ALI donc l'impédance d'entrée est **infinie**. C'est un avantage car cela garantit qu'il n'y aura **pas d'effet diviseur de tension entre les deux filtres en cascade** (et ce quelque soit l'impédance de sortie de  $(F_a)$ ). On pourra donc écrire la fonction de transfert globale sous la forme  $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$ .

17. La composante continue du signal  $u_e(t)$  est égale à 10 mV et la fréquence fondamentale est légèrement supérieure à 300 Hz. C'est cohérent avec l'analyse du signal que l'on a mené aux questions 1 et 2.

18. Le spectre de la tension  $u_1(t)$  doit être identique à celui de la tension  $u_e(t)$ , sans la composante continue. Il s'agit donc du **spectre (a)**.

19. Dans le spectre de la tension  $u_2(t)$ , il n'y a pas de composante continue et l'amplitude du fondamental doit être environ 100 fois plus élevée que dans le spectre de  $u_e(t)$ , c'est-à-dire légèrement inférieure à 2000 mV. Le seul spectre qui convient est le **spectre (d)**.

### Exercice 3 : Montage intégrateur

1. L'ALI peut fonctionner en régime linéaire car il y a **une boucle de rétroaction négative**.

2. Voir démo dans le cours :  $\underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}$ . On en déduit que :

$$\underline{S} = -\frac{1}{RC} \times \frac{E}{j\omega} \xrightarrow{\mathbb{R}} s(t) = -\frac{1}{RC} \int e(t) dt$$

3. a) Le spectre en amplitude de la tension d'entrée contient deux pics aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , de même amplitude  $E$ .

3. b) On calcule la tension de sortie en appliquant le principe de superposition.

$$\begin{cases} e_1(t) = E \cos(2\pi f_1 t) \xrightarrow{(F)} s_1(t) = -\frac{1}{RC} \int e_1(t) dt = -\frac{E}{2\pi f_1 RC} \sin(2\pi f_1 t) \\ e_2(t) = E \cos(2\pi f_2 t) \xrightarrow{(F)} s_2(t) = -\frac{1}{RC} \int e_2(t) dt = -\frac{E}{2\pi f_2 RC} \sin(2\pi f_2 t) \end{cases}$$

On conclut que  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = -\frac{E}{2\pi RC} \left( \frac{\sin(2\pi f_1 t)}{f_1} + \frac{\sin(2\pi f_2 t)}{f_2} \right)$ .

3. c) On calcule les amplitudes des composantes spectrales du signal de sortie :

- fréquence  $f_1$  :  $A_1 = \frac{E}{2\pi f_1 RC} = 4V$ .
- fréquence  $f_2$  :  $A_2 = \frac{E}{2\pi f_2 RC} = 2V$ .

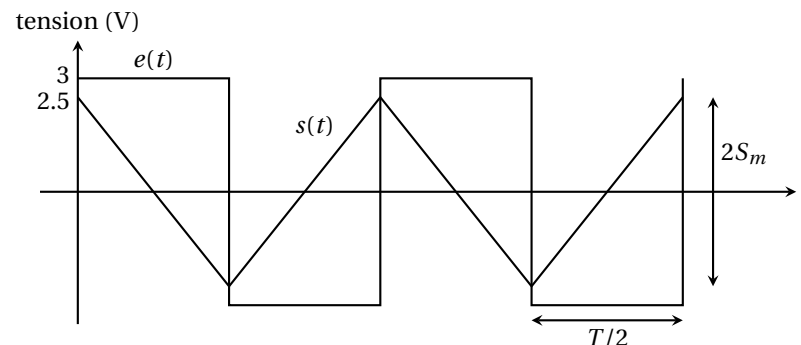
4. Le signal d'entrée est un rectangle oscillant entre  $\pm 3V$ . En sortie on obtient la primitive d'un rectangle, c'est-à-dire un **triangle**. Pour déterminer son amplitude  $S_m$  on calcule d'abord les pentes.

Prenons le cas où  $e(t) = -E_m$  :  $s(t) = -\frac{1}{RC} \int -E_m dt = \frac{E_m}{RC} t + \text{Cste}$ . La pente est positive et vaut  $\frac{E_m}{RC}$ .

La tension d'entrée reste égale à  $-E_m$  pendant une moitié de période ( $\Delta t = T/2$ ), donc l'amplitude du triangle vérifie :

$$\frac{E_m}{RC} = \frac{2S_m}{T/2} = \frac{4S_m}{T} = 4fS_m \iff S_m = \frac{E_m}{4RCf} = 2,5V$$

On trace l'allure de  $e(t)$  et  $s(t)$ .



5. Si la tension d'entrée possède une composante continue  $E_0$  alors celle-ci est intégrée pour donner une **fonction affine** :  $E_0 \xrightarrow{(F)} -\frac{E_0}{RC} t + \text{Cste}$ . La tension de sortie, en théorie, tend vers  $\pm\infty$ . En pratique la tension de sortie finira forcément par atteindre les **valeurs de saturation** (typiquement  $\pm 15V$ ) donc l'ALI ne sera plus en régime linéaire mais en **régime saturé**.

6. Voir cours : l'impédance d'entrée du montage vaut :  $\underline{Z}_e = R$ .

Ce n'est pas idéal, on préférerait que l'impédance d'entrée soit **infinie** pour éviter une éventuelle chute de tension si l'on place un quadripôle **en amont** de l'intégrateur.

Remarque : Il n'y a pas de problème si l'on place un quadripôle **en aval** de l'intégrateur car son impédance de sortie est nulle.

