

Chapitre 20 : Mouvement d'un solide

1 Description du mouvement d'un solide

1.1 Définition

Un solide est un système matériel indéformable. Par conséquent :

- Tous les points d'un solide sont immobiles les uns par rapport aux autres,
- La distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante, quelque soit le mouvement du solide.

1.2 Degré des liberté

Chaque direction indépendante selon laquelle une translation est possible constitue un **degré de liberté de translation**.

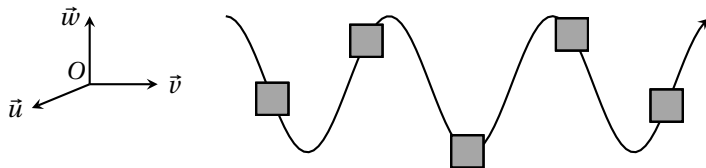
Chaque direction indépendante selon laquelle une rotation est possible constitue un **degré de liberté de rotation**.

Un solide possède six degrés de liberté : trois de translation et trois de rotation. Par conséquent, **la position de tous les points d'un solide est entièrement déterminée par la donnée de six coordonnées**.

1.3 Translation

Un solide est en translation dans un référentiel donné si et seulement si **tous ses points ont le même vecteur vitesse**.

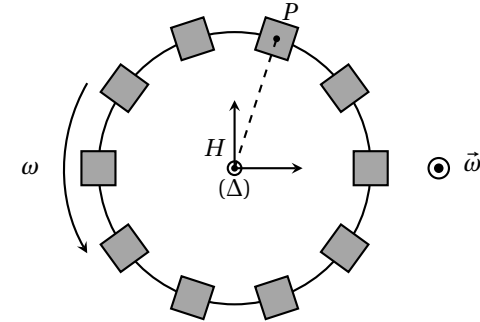
Dans le cas particulier de la translation, le mouvement du solide est entièrement décrit par le mouvement d'un de ses points.



1.4 Rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe (Δ) fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ s'il existe une unique droite (Δ) immobile à la fois par rapport au solide et à $\mathcal{R}$.

Dans un mouvement de rotation, tous les points du solide effectuent un mouvement **circulaire** autour de (Δ) à la **même vitesse angulaire** ω .



Dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, on peut montrer que la vitesse de tout point du solide est donnée par la relation :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = r\omega\vec{u}_\theta$$

Où $\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation instantanée du solide et défini par :

- sa norme : ω , la vitesse angulaire commune à tous les points du solide,
- sa direction : il est colinéaire à l'axe de rotation,
- son sens : il est donné par la règle du produit vectoriel. On remarque qu'il est tel que $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\omega})$ forme un trièdre direct.

2 Solide en rotation autour d'un axe fixe

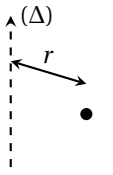
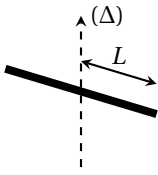
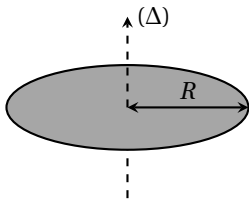
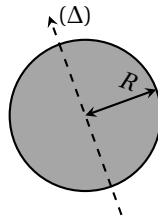
2.1 Moment d'inertie

Un système $(\mathcal{S})$ indéformable constitué de N points matériels M_i de masses m_i est en rotation autour d'un axe orienté (Δ) , à la vitesse angulaire (algébrique) ω . On note r_i la distance du point M_i à l'axe. Le moment cinétique de ce solide par rapport à (Δ) s'écrit sous la forme :

$$L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta \omega \quad \text{avec} \quad J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$$

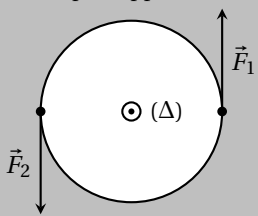
où J_Δ s'appelle le **moment d'inertie** du solide par rapport à (Δ) .

Le moment d'inertie mesure l'inertie mécanique d'un système qu'on veut mettre en rotation autour d'un axe. Il s'agit d'une grandeur additive (si l'on réunit deux solides, le moment d'inertie de l'ensemble est égal à la somme des moments d'inertie de chaque solide pris séparément). On admet que cette expression se généralise à tout solide et on donne quelques exemples de moments d'inertie classiques :

Masse ponctuelle	Tige rectiligne homogène / médiatrice	Disque homogène / axe de symétrie de révolution	Boule homogène / axe de symétrie
			
$J_{\Delta} = mr^2$	$J_{\Delta} = \frac{mL^2}{3}$	$J_{\Delta} = \frac{mR^2}{2}$	$J_{\Delta} = \frac{2mR^2}{5}$

2.2 Couple de force

Def : Considérons un système sur lequel s'exercent un ensemble de force **dont la résultante est nulle** mais dont le moment résultant par rapport à un axe orienté est non nul.



On appelle **couple de force** le moment résultant de cet ensemble de force :

$$\Gamma = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$$

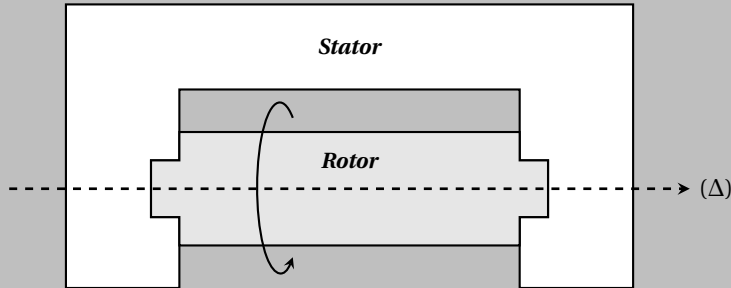
Un couple qui a pour effet d'augmenter la vitesse angulaire en valeur absolue est appelé **couple moteur**. Un couple qui a pour effet de diminuer la vitesse angulaire en valeur absolue est appelé **couple résistant** ou **couple de freinage**.

Rq : Par définition un couple de forces appliqué par exemple à un solide ne provoque aucun mouvement de translation (résultante des forces nulle) mais uniquement un mouvement de rotation autour de (Δ) (moment résultant non nul).

2.3 Liaison pivot

Une liaison assure une jonction entre deux éléments d'un système mécanique. On distingue les différents types de liaison suivant les degrés de libertés (de translation et/ou de rotation) qu'elles laissent aux éléments mobiles. Dans ce chapitre on s'intéresse à une liaison entre un élément fixe (dans le référentiel d'étude), appelé **stator**, et un élément en rotation autour d'un axe fixe, appelé **rotor**.

Def : On appelle **liaison pivot** une liaison qui contraint le rotor à ne posséder qu'un seul degré de liberté de rotation autour d'un axe fixe (ex : tambour de machine à laver).



Une liaison pivot prive le rotor de ses degrés de liberté de translation, ce qui signifie que la résultante des forces de liaison est non nulle (elles compensent le poids et d'éventuelles vibrations du rotor). Il existe inévitablement des frottements mécaniques au niveau de la surface de contact entre l'axe et le solide qui s'opposent à la rotation et produisent un **couple de freinage** ($\mathcal{M}_{\Delta}$ (liaison) de signe opposé à ω). Toutefois, on peut réduire ces frottements avec un peu d'astuce (lubrification, utilisation d'engrenages ou de roulements à billes). Dans ce cas, on pourra utiliser le modèle simplifié de la **liaison pivot idéale**, telle que le moment résultant des actions de liaison par rapport à l'axe de rotation est nul.

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$$

2.4 TMC appliqué à un solide en rotation autour d'un axe orienté (Δ) fixe dans un référentiel galiléen

Soit ($\mathcal{S}$) un solide soumis à un ensemble de forces extérieures et/ou de couples, et (Δ) un axe orienté fixe dans un référentiel ($\mathcal{R}$) galiléen. Le théorème du moment cinétique appliqué à ($\mathcal{S}$), par rapport à (Δ) s'énonce de la manière suivante :

$$\frac{dL_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum [\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) + \Gamma_{\text{ext}}]$$

3 Applications

3.1 Pendule de torsion

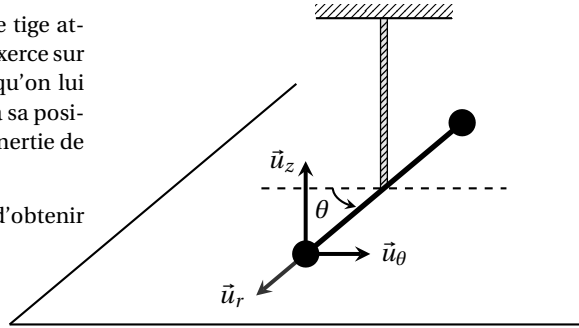
Un pendule de torsion est constitué d'une tige attachée à un fil de torsion (Oz) vertical qui exerce sur la tige un couple de rappel $\Gamma = -C\theta$ lorsqu'on lui impose une torsion d'angle θ par rapport à sa position d'équilibre. On note J_z le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Oz).

Le TMC appliqué à la masse permet d'obtenir l'équation du mouvement du pendule :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_z} \theta = 0$$

La tige effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre avec la pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_z}}$$



3.2 Pendule pesant

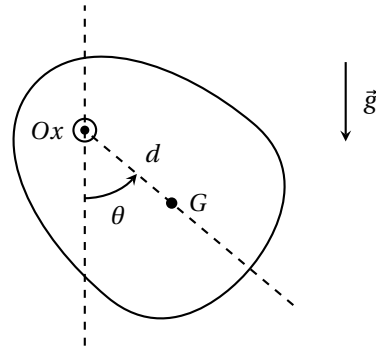
Un pendule pesant est constitué d'un solide ($\mathcal{S}$) de masse m , de forme quelconque, mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe (Ox) ne passant pas par son centre d'inertie G . La liaison pivot entre le solide et l'axe de rotation est supposée parfaite. On note $d = OG$ et J_x le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.

L'équation du mouvement du pendule pesant s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_x} \sin \theta = 0$$

Dans l'approximation des petits angles, le pendule pesant effectue des oscillations harmoniques de pulsation:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_x}}$$



4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

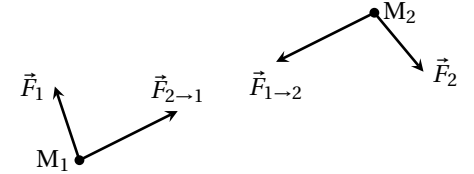
4.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe (Δ), fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. On note J_Δ le moment d'inertie de ce solide par rapport à (Δ) et ω la vitesse de rotation du solide autour de (Δ), dans le référentiel $\mathcal{R}$. L'énergie cinétique du solide (dans $\mathcal{R}$) s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

4.2 Cas d'un système de deux points matériels

On considère un système ($\mathcal{S}$) constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 en interaction. On note $\vec{F}_1$ (respectivement $\vec{F}_2$) la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur M_1 (respectivement M_2) et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ (respectivement $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$) la force exercée par M_2 sur M_1 (respectivement par M_1 sur M_2).



Le théorème de la puissance cinétique appliqué à ($\mathcal{S}$) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

- $\mathcal{P}_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1$ et $\mathcal{P}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2$ sont les puissances des forces extérieures au système
- $\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2$ est la puissance des forces intérieures.

Si le système ($\mathcal{S}$) est indéformable alors la puissance des forces intérieures est nulle.

4.3 Théorème de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

On a vu que pour un solide la puissance des forces intérieures est nulle. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

On retient que $\vec{v}_i$ est la vitesse du point d'application de la force $\vec{F}_i$.

Dans le cas particulier d'une rotation autour d'un axe (Δ) fixe on admet que la puissance d'une force s'exprime en fonction de son moment scalaire et de la vitesse angulaire de rotation sous la forme :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \omega \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$$

De la même manière la puissance associée à un couple Γ vaut :

$$\mathcal{P} = \omega \Gamma$$

Par intégration entre deux points A et B d'une trajectoire, on obtient le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W(\vec{F})$$

4.4 Calcul d'un travail

4.4.1 Poids

Le travail du poids vaut :

$$W(\vec{P}) = \pm mgh_G$$

avec h_G le **dénivelé du centre d'inertie**, et le signe + si G descend (travail moteur) et – si G monte (travail résistant).

4.4.2 Force qui s'applique en un point de l'axe

Le travail d'une force qui s'applique en un point de (Δ) est nul car $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

4.5 Énergie potentielle

4.5.1 Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide s'écrit, à une constante près :

$$E_p = \pm mgz_G$$

avec z_G l'altitude du centre d'inertie et un signe + si l'axe (Oz) est ascendant, signe – s'il est descendant.

4.5.2 Énergie potentielle du couple de rappel d'un fil de torsion

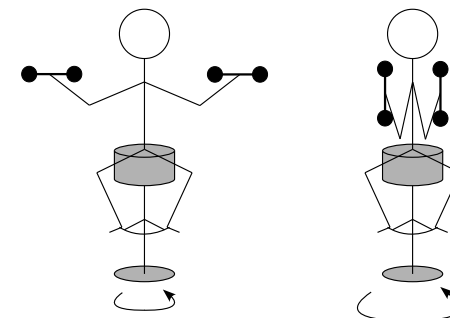
Le couple de rappel d'un fil de torsion est conservatif et son énergie potentielle associée s'écrit à une constante près :

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2$$

4.6 Système déformable : étude du tabouret d'inertie

Un tabouret d'inertie est un tabouret lié à son axe de rotation par une liaison pivot idéale. Le moment du poids d'une personne assise sur le tabouret est nul car colinéaire à l'axe de rotation. Le mouvement d'une personne assise sur le tabouret d'inertie est donc tel que :

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega = \text{Cste}$$



Le tabouret permet de mettre en évidence l'effet d'une déformation d'un système sur le mouvement de rotation :

- Lorsqu'on réduit le moment d'inertie, la vitesse angulaire augmente.
- Sans aucune action extérieure, la personne voit son énergie cinétique augmenter. Cette augmentation est due au travail des forces intérieures, c'est-à-dire ici le travail musculaire qu'il a fallu exercer pour bouger les bras, autrement dit pour déformer le système.