Corrigé DM20

1. On détermine la vitesse v_0 en appliquant à l'un des satellites en orbite circulaire de rayon r_0 le principe fondamental de la dynamique, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$-m\frac{v_0^2}{r_0}\vec{u}_r = -\frac{GmM_T}{r_0^2}\vec{u}_r \iff \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$$

2. On calcule l'énergie mécanique de B immédiatement après l'accélération (B est alors toujours à la distance r_0 de la Terre) : $E_B = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_T}{r_0}$. On en déduit l'expression du demi-grand axe :

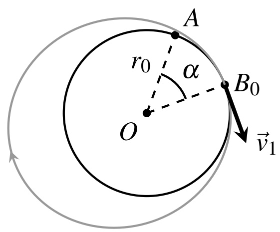
$$E_B = -\frac{GmM_T}{2a} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_T}{r_0} \iff -\frac{1}{2a} = \frac{v_1^2}{2GM_T} - \frac{1}{r_0}$$

On simplifie avec $GM_T = r_0v_0^2$ (question 1) et on obtient : $\boxed{a = \frac{r_0}{2-v_1^2/v_0^2}}$.

3. D'après la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire et l'orbite elliptique :

$$\frac{T_1^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \iff \boxed{T_1 = T_0\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2} = T_0\left(2-\frac{v_1^2}{v_0^2}\right)^{-3/2}}$$

4. Pour que les deux satellites se recontrent le plus tôt possible il faut que A avance d'un angle $\alpha + 2\pi$ sur son orbite pendant que B effectue exactement une révolution (voir figure ci-contre). Or la vitesse angulaire de A vaut $\dot{\theta}_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ donc il faut faire en sorte que :



$$\boxed{T_1 = \frac{\alpha+2\pi}{\dot{\theta}_0} = \left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)T_0}$$

On en déduit l'expression de la vitesse v_1 à choisir :

$$\frac{T_1}{T_0} = 1+\frac{\alpha}{2\pi} = \left(2-\frac{v_1^2}{v_0^2}\right)^{-3/2} \iff \boxed{v_1 = v_0\sqrt{2-\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{-2/3}}}$$

L'application numérique donne : $\boxed{\frac{v_1}{v_0} = 1,067}$.

Corrigé DM20

1. On détermine la vitesse v_0 en appliquant à l'un des satellites en orbite circulaire de rayon r_0 le principe fondamental de la dynamique, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$-m\frac{v_0^2}{r_0}\vec{u}_r = -\frac{GmM_T}{r_0^2}\vec{u}_r \iff \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$$

2. On calcule l'énergie mécanique de B immédiatement après l'accélération (B est alors toujours à la distance r_0 de la Terre) : $E_B = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_T}{r_0}$. On en déduit l'expression du demi-grand axe :

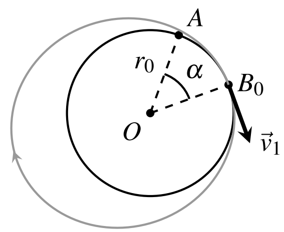
$$E_B = -\frac{GmM_T}{2a} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_T}{r_0} \iff -\frac{1}{2a} = \frac{v_1^2}{2GM_T} - \frac{1}{r_0}$$

On simplifie avec $GM_T = r_0v_0^2$ (question 1) et on obtient : $\boxed{a = \frac{r_0}{2-v_1^2/v_0^2}}$.

3. D'après la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire et l'orbite elliptique :

$$\frac{T_1^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \iff \boxed{T_1 = T_0\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2} = T_0\left(2-\frac{v_1^2}{v_0^2}\right)^{-3/2}}$$

4. Pour que les deux satellites se recontrent le plus tôt possible il faut que A avance d'un angle $\alpha + 2\pi$ sur son orbite pendant que B effectue exactement une révolution (voir figure ci-contre). Or la vitesse angulaire de A vaut $\dot{\theta}_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ donc il faut faire en sorte que :



$$\boxed{T_1 = \frac{\alpha+2\pi}{\dot{\theta}_0} = \left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)T_0}$$

On en déduit l'expression de la vitesse v_1 à choisir :

$$\frac{T_1}{T_0} = 1+\frac{\alpha}{2\pi} = \left(2-\frac{v_1^2}{v_0^2}\right)^{-3/2} \iff \boxed{v_1 = v_0\sqrt{2-\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{-2/3}}}$$

L'application numérique donne : $\boxed{\frac{v_1}{v_0} = 1,067}$.