DM de physique n° 21

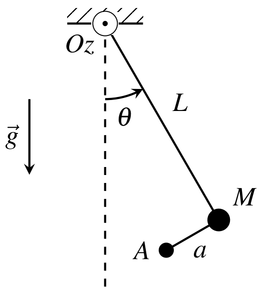
Exercice : Une balançoire

On souhaite étudier un mécanisme par lequel un enfant assis sur une balançoire peut faire augmenter l'amplitude de ses oscillations.

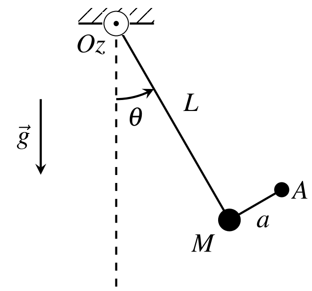
On modélise l'enfant de masse m comme un ensemble de deux masses ponctuelles articulées. Les jambes de masse μ sont en A et le reste du corps de masse $m-\mu$ est en M. on note $a = MA$.

On suppose que l'enfant change périodiquement la position de ses jambes. À $t = 0$ il les met vers l'arrière pendant une durée $\frac{T}{2}$ puis vers l'avant pendant la même durée $\frac{T}{2}$, et ainsi de suite. Pour simplifier, il est supposé que la direction AM fait un angle droit avec la direction OM à la "montée" comme à la "descente".

La balançoire a une longueur L et une masse négligeable. On étudie les premières oscillations, de sorte que l'on se placera toujours dans l'approximation des petits angles. On note g l'accélération de la pesanteur.



$0 < t < \frac{T}{2}$: jambes en arrière



$\frac{T}{2} < t < T$: jambes en avant

1. Montrer que le moment d'inertie de l'enfant par rapport à l'axe (Oz) est le même dans les deux positions des jambes et vaut : $J = mL^2 + \mu a^2$.

2. Montrer que le mouvement général de l'enfant vérifie l'équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = E_{\text{exc}}(t)$, avec $E_{\text{exc}}(t)$ une fonction de période T et d'amplitude A. Exprimer ω_0 et A en fonction de μ, m, a, L et g.

On note $\omega = 2\pi/T$ la pulsation de la fonction excitatrice et on admet sa décomposition de Fourier :

$$E_{\text{exc}}(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n+1)\omega t\right]}{2n+1}$$

Par la suite on considérera uniquement le terme fondamental de cette décomposition et on s'intéressera au régime forcé de pulsation ω. On introduit l'amplitude complexe $\underline{\Theta}$ définie par : $\theta(t) = \text{Re}\left[\underline{\Theta}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]$.

3. Exprimer $\underline{\Theta}$ en fonction de A, ω_0 et ω.

4. Justifier qu'une résonance se produit pour une pulsation ω à préciser. Que pouvez-vous dire de l'amplitude à la résonance ?

Interpréter physiquement ce résultat, notamment au regard de l'évolution de $\theta(t)$ sur les premières oscillations, représentée sur le graphe ci-contre. D'où provient l'énergie de ces oscillations amplifiées ?