Correction du DNS 18

EXERCICE

Le réel 1 est racine triple de P si et seulement si $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et que $P'''(1) \neq 0$. Or

$$P' = 6X^5 - 10X^4 + 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + 8 \quad \text{et} \quad P'' = 30X^4 - 40X^3 + 12aX^2 + 6bX + 2c$$

donc :

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \\ P''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -3 \\ 4a + 3b + 2c = -4 \\ 12a + 6b + 2c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = -1 \end{cases} \text{(après calculs).}$$

Le polynôme devient

$$P = X^6 - 2X^5 + 4X^4 - 6X^3 - X^2 + 8X - 4.$$

En effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ on obtient

$$P = (X-1)^3(X^3 + X^2 + 4X + 4).$$

On voit que -1 est racine de $X^3 + X^2 + 4X + 4$, qui est donc divisible par $X + 1$. On obtient

$$P = (X-1)^3(X+1)(X^2+4).$$

Or $X^2 + 4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ donc la factorisation ci-dessus est la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ il reste à factoriser $X^2 + 4$. Ses racines sont $2i$ et $-2i$ donc :

$$P = (X-1)^3(X+1)(X-2i)(X+2i).$$

PROBLÈME

1) a) On a $Q' = b_1 + 2b_2X + \ldots + (n+1)b_{n+1}X^{n+1}$ donc par identification on a $b_1 = a_0$, $b_2 = \dfrac{a_1}{2}$, ..., $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$ ou plus généralement $b_k = \dfrac{a_{k-1}}{k}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$.

b) On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x)dx &= \int_0^1 \left(b_0 + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx \\ &= \left[b_0x + a_0\frac{x^2}{2} + a_1\frac{x^3}{2.3} + \ldots + a_n\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1 \\ &= b_0 + \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2.3} + \ldots + \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx = 0$ si et seulement si $b_0 = -\dfrac{a_0}{2} - \dfrac{a_1}{2.3} - \ldots - \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$.

2) Pour calculer B_{n+1} quand on connaît B_n il suffit d'utiliser $(*)$ en prenant $P = (n+1)B_n$. On obtient ainsi $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$ puis $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$, et donc $b_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $b_2 = \dfrac{1}{6}$.

3) On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de degré n et que son coefficient dominant est 1. Montrons-le par récurrence.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $B_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que B_n est de degré n et que son coefficient dominant est 1. Alors $(n+1)B_n$ est de degré n et son coefficient dominant est $n+1$, donc d'après $(*)$ B_{n+1} est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est 1.

Le théorème de récurrence permet de conclure.

4) On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} B_n(1) - B_n(0) &= \int_0^1 B_n'(x)dx \\ &= \int_0^1 nB_{n-1}(x)dx \\ &= n\int_0^1 B_{n-1}(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

car par définition on a $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(x)dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) a) On raisonne par récurrence sur k.

Pour $k = 0$, c'est immédiat.

Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Supposons que $B_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$. Alors :

$$B_n^{(k+1)} = \left(B_n^{(k)}\right)' = \frac{n!}{(n-k)!} B'_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)B_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} B_{n-k-1}$$

et la récurrence est achevée.

b) Il suffit d'appliquer la formule de Taylor pour les polynômes :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_{n-k}(0) X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

Le changement d'indice $j = n - k$ donne alors :

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} b_j X^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j X^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}.$$

6) a) On a $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k X^{n+1-k}$ et $b_{n+1} = B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$, donc :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k + \binom{n+1}{n} b_n + \binom{n+1}{n+1} b_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k + (n+1)b_n + b_{n+1},
\end{aligned}$$

et donc $b_n = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$.

b) La formule précédente donne

$$b_3 = -\frac{1}{4}\left(\binom{4}{0} b_0 + \binom{4}{1} b_1 + \binom{4}{2} b_2\right) = 0$$

et

$$b_4 = -\frac{1}{5}\left(\binom{5}{0} b_0 + \binom{5}{1} b_1 + \binom{5}{2} b_2 + \binom{5}{3} b_3\right) = -\frac{1}{30}.$$

c) Il y a différentes manières de procéder. La méthode naïve consiste à utiliser la formule $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$:

```
def factorielle(n):
    fact = 1
    for i in range(1, n+1):
        fact = fact * i
    return fact

def binomial(n, p):
    return factorielle(n) // (factorielle(p) * factorielle(n-p))
```

La méthode suivante, basée sur la relation $\dbinom{n}{i+1} = \dfrac{n-i}{i+1}\dbinom{n}{i}$, est plus efficace :

```
def binomial(n, p):
    if 2*p > n:
        p = n - p
```

```
    coeff = 1
    i = 0
    while i < p:
        coeff = coeff * (n-i) // (i+1)
        i = i + 1
    return coeff
```

d) Version récursive (la fonction s'appelle elle-même, facile à programmer mais très inefficace ici) :

```
def bernoulli(n):
    if n == 0:
        return 1
    s = 0
    for k in range(n):
        s += binomial(n+1, k) * bernoulli(k)
    return -s/(n+1)
```

Version itérative (on crée une liste contenant les b_k) :

```
def bernoulli(n):
    b = [1]
    for p in range(1, n+1):
        s = 0
        for k in range(p):
            s += binomial(p+1, k) * b[k]
        b.append(-s/(p+1))
    return b[-1]

>>> bernoulli(4)
-0.033333333333333305
```

Ces deux fonctions génèrent très rapidement des erreurs avec les flottants. En Python on peut utiliser le module `fractions` qui permet de travailler avec des nombres rationnels :

```
from fractions import Fraction

def bernoulli(n):
    b = [1]
    for p in range(1, n+1):
        s = 0
        for k in range(p):
            s += binomial(p+1, k) * b[k]
        b.append(Fraction(-s, p+1))
    return b[-1]

>>> bernoulli(4)
Fraction(-1, 30)
```

7) a) On a (attention à la dérivée d'une composée) :

$$C'_{n+1} = -(-1)^{n+1}B'_{n+1}(1-X) = (-1)^n(n+1)B_n(1-X) = (n+1)C_n,$$

et, en posant $y = 1-x$:

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(1-x)dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(y)dy = 0.$$

Ainsi la suite (C_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (B_n). De plus, $C_0 = 1$. Par unicité de la suite (B_n), on en déduit que $B_n = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a $B_{2p+1} = C_{2p+1} = (-1)^{2p+1}B_{2p+1}(1-X) = -B_{2p+1}(1-X)$, donc $B_{2p+1}(0) = -B_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0)$ (car $2p+1 \geqslant 2$), d'où $B_{2p+1}(0) = 0$ et donc $b_{2p+1} = 0$.

8) a) Pour $n = 1$, on a bien $B_n(X+1) - B_n(X) = X + 1 - \dfrac{1}{2} - X + \dfrac{1}{2} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$. Alors $B'_{n+1}(X+1) - B'_{n+1}(X) = (n+1)(B_n(X+1) - B_n(X)) = (n+1)nX^{n-1}$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n + c$. Or $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$, donc $c = 0$, et donc $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$.

Par le théorème de récurrence, on en déduit que $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) D'après la question précédente, on a $B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = (n+1)k^n$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$. En sommant on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p} (B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)) = (n+1) \sum_{k=0}^{p} k^n,$$

d'où, par télescopage :

$$B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0) = (n+1) \sum_{k=0}^{p} k^n,$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{p} k^n = \frac{B_{n+1}(p+1) - b_{n+1}}{n+1}.$$

c) En procédant comme à la question 2, on obtient $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ et $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} k &= \frac{B_2(p+1) - b_2}{2} = \frac{(p+1)^2 - (p+1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}, \\
\sum_{k=0}^{p} k^2 &= \frac{B_3(p+1) - b_3}{3} = \frac{(p+1)^3 - 3(p+1)^2/2 + (p+1)/2}{3} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}, \\
\sum_{k=0}^{p} k^3 &= \frac{B_4(p+1) - b_4}{4} = \frac{(p+1)^4 - 2(p+1)^3 + (p+1)^2}{2} = \frac{p^2(p+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$