

# Correction du DNS 20

## Partie 1

1) L'intervalle  $[-1, 1]$  est symétrique par rapport à 0 et, pour tout  $x$  de cet intervalle,

$$f_n(-x) = \sin(2n \operatorname{Arcsin}(-x)) = \sin(-2n \operatorname{Arcsin} x) = -\sin(2n \operatorname{Arcsin} x) = -f(x).$$

La fonction  $f_n$  est donc impaire.

On a  $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$  donc  $f_n(0) = 0$ , et  $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$  donc  $f_n(1) = \sin n\pi = 0$ .

2) Soit  $x \in [0, 1]$ . Alors :

$$\begin{aligned} f_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(2n \operatorname{Arcsin} x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2n \operatorname{Arcsin} x = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \operatorname{Arcsin} x = \frac{k\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Or  $\operatorname{Arcsin}([0, 1]) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , donc l'équation  $\operatorname{Arcsin} x = \frac{k\pi}{2n}$  n'a de solutions sur  $[0, 1]$  que si  $0 \leq \frac{k\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire si  $0 \leq k \leq n$ . Dans ce cas,  $\operatorname{Arcsin} x = \frac{k\pi}{2n} \Leftrightarrow x = \sin \frac{k\pi}{2n}$ .

L'ensemble des solutions de l'équation  $f_n(x) = 0$  sur  $[0, 1]$  est donc  $\mathcal{S} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{2n} \mid 0 \leq k \leq n \right\}$ . Comme la fonction sinus est strictement croissante sur  $[0, \pi]$ , ces solutions sont deux à deux distinctes. Il y en a donc  $n + 1$ .

3) a) La fonction  $\operatorname{Arcsin}$  est continue sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] -1, 1[$  et la fonction  $\sin$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc, par composition, la fonction  $f_n$  est continue sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] -1, 1[$ , et pour tout  $x \in ] -1, 1[$  :

$$f'_n(x) = \cos(2n \operatorname{Arcsin} x) \frac{2n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n \cos(2n \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) La limite de  $\operatorname{Arcsin} x$  quand  $x$  tend vers 1 est  $\pi/2$  donc celle de  $\cos(2n \operatorname{Arcsin} x)$  est  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ . Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2n \cos(2n \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Par le théorème de limite de la dérivée on en déduit que  $f_n$  n'est pas dérivable en 1. Sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 1 (même chose en  $-1$  puisque  $f_n$  est impaire).

4) Au voisinage de 0,  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . Par conséquent,  $\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  (DL d'une primitive en utilisant le fait que  $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$ ).

On a donc, au voisinage de 0,  $f_n(x) = \sin\left(2nx + \frac{nx^3}{3} + o(x^3)\right)$ . Or  $\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)$  au voisinage de 0, donc :

$$\begin{aligned} f_n(x) &\stackrel{0}{=} 2nx + \frac{nx^3}{3} - \frac{8n^3x^3}{6} + o(x^3) \\ &\stackrel{0}{=} 2nx + \frac{n-4n^3}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

5) Posons le changement de variables  $t = \operatorname{Arcsin} x$ . Alors  $x = \sin t$ , donc  $dx = \cos t dt$ , et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \cos(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} - \frac{\cos((2n-1)t)}{2n-1} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{2n}{(2n+1)(2n-1)}. \end{aligned}$$

6) a) On a vu que  $f_1$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et que  $f_1'(x) = \frac{2 \cos(2 \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}$  pour tout  $x \in ] -1, 1[$ . Or :

$$\begin{aligned} \cos(2 \operatorname{Arcsin} x) > 0 &\Leftrightarrow -\pi/2 < 2 \operatorname{Arcsin} x < \pi/2 \\ &\Leftrightarrow -\pi/4 < \operatorname{Arcsin} x < \pi/4 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2, \end{aligned}$$

donc la fonction  $f_1$  est strictement croissante sur  $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$  et strictement décroissante sur  $[-1, -\sqrt{2}/2]$  et  $[\sqrt{2}/2, 1]$ . On a facilement  $f_1(\sqrt{2}/2) = 1$  et  $f_1(-\sqrt{2}/2) = -1$ .

On a vu en 4) que  $f_1(x) = 2x - x^3 + o(x^3)$  au voisinage de 0. Une équation de la tangente à la courbe à l'origine est donc  $y = 2x$ , et, au voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente pour  $x < 0$  et en-dessous pour  $x > 0$  (point d'inflexion).

b) D'après la question 5, on a  $\int_0^1 f_1(x) dx = \frac{2}{3}$ . L'unité graphique étant de 4 cm, l'unité d'aire est de 16 cm<sup>2</sup>, donc l'aire recherchée vaut  $\frac{32}{3}$  cm<sup>2</sup>.

## Partie 2

1) a) Pour tout réel  $\theta$ , on a  $\cos(2n\theta) + i \sin(2n\theta) = e^{2ni\theta} = (e^{i\theta})^{2n} = (\cos \theta + i \sin \theta)^{2n}$  (formule de Moivre).

D'après la formule du binôme de Newton,  $(\cos \theta + i \sin \theta)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (\cos \theta)^{2n-p} i^p (\sin \theta)^p$ .

Or  $\sin(2n\theta)$  est la partie imaginaire de  $\cos(2n\theta) + i \sin(2n\theta)$ , et  $i^p = 1$  ou  $-1$  si  $p$  est pair et  $i$  ou  $-i$  si  $p$  est impair. Dans la somme on prend donc uniquement les termes d'indice  $p$  impair, pour lesquels on pose  $p = 2k + 1$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \sin(2n\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (\cos \theta)^{2n-2k-1} i^{2k+1} (\sin \theta)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (\cos \theta)^{2n-2k-1} (\sin \theta)^{2k+1}. \end{aligned}$$

b) On a donc :

$$\begin{aligned} \sin(2n\theta) &= \sin \theta \cos \theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (\cos \theta)^{2n-2k-2} (\sin \theta)^{2k} \\ &= \sin \theta \cos \theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (\cos^2 \theta)^{n-k-1} (\sin \theta)^{2k} \\ &= \sin \theta \cos \theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (1 - \sin^2 \theta)^{n-k-1} (\sin \theta)^{2k} \\ &= \sin \theta \cos \theta P_n(\sin \theta) \end{aligned}$$

puisque  $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (1 - X^2)^{n-k-1} X^{2k}$ .

2) a) Pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a :

$$f_n(x) = \sin(2n \operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x) \cos(\operatorname{Arcsin} x) P_n(\sin(\operatorname{Arcsin} x)) = x \sqrt{1-x^2} P_n(x).$$

b) On trouve  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = -8X^2 + 4$  et  $P_3 = 32X^4 - 32X^2 + 6$  (calculs à détailler).

3) D'après la formule du binôme de Newton,  $(1+1)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} 1^p 1^{n-p} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p}$ , donc  $\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} = 2^{2n}$ , et

$$(1-1)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p 1^{n-p} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p, \text{ donc } \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p = 0.$$

En séparant dans chacune des sommes précédentes les termes d'indice pair, pour lesquels on pose  $p = 2k$ , et les termes d'indice impair, pour lesquels on pose  $p = 2k + 1$ , on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} = 2^{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 0.$$

En soustrayant ces deux égalités on obtient  $2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n}$ , d'où  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$ .

4) a) En développant  $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (1-X^2)^{n-k-1} X^{2k}$  on n'obtiendra que des termes de degrés pairs.

b) Le terme de plus haut degré dans le développement de  $(-1)^k (1-X^2)^{n-k-1} X^{2k}$  est  $(-1)^k (-X^2)^{n-k-1} X^{2k} = (-1)^k (-1)^{n-k-1} X^{2n-2k-2} X^{2k} = (-1)^{n-1} X^{2n-2}$ .

Par conséquent, le terme de plus haut degré de  $P_n$  est  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^{n-1} X^{2n-2} = (-1)^{n-1} X^{2n-2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$ .

Or  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$  donc le terme de plus haut degré de  $P_n$  est  $(-1)^{n-1} 2^{2n-1} X^{2n-2}$ .

Le polynôme  $P_n$  est donc de degré  $2n-2$  et son coefficient dominant est  $(-1)^{n-1} 2^{2n-1}$ .

c) Calculons  $P_n(0)$ . Dans la formule  $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (1-X^2)^{n-k-1} X^{2k}$ , si on remplace  $X$  par 0, tous les termes s'annulent sauf pour  $k=0$ . On a donc  $P_n(0) = \binom{2n}{1} = 2n$ .

d) Calculons de même  $P_n(1)$ . Dans la formule  $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (1-X^2)^{n-k-1} X^{2k}$ , si on remplace  $X$  par 1, tous les termes s'annulent sauf pour  $k=n-1$ . On a donc  $P_n(1) = \binom{2n}{2n-1} (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} 2n$ .

5) a) Puisque  $f_n(x) = x\sqrt{1-x^2}P_n(x)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$  et que  $P_n(0) \neq 0$  et  $P_n(1) \neq 0$ , les solutions sur  $[0, 1]$  de l'équation  $P_n(x) = 0$  sont les solutions sur  $[0, 1]$  de l'équation  $f_n(x) = 0$  différentes de 0 et 1. L'ensemble de ces solutions est donc  $\mathcal{S}_{[0,1]} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{2n} \mid 0 < k < n \right\}$ .

L'ensemble des solutions sur  $[-1, 1]$  de l'équation  $P_n(x) = 0$  est  $\mathcal{S}_{[-1,1]} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{2n} \mid 0 < k < n \right\} \cup \left\{ -\sin \frac{k\pi}{2n} \mid 0 < k < n \right\}$  car la fonction polynomiale  $P_n$  est paire.

Cela nous donne déjà  $(n-1) + (n-1) = 2n-2$  racines distinctes du polynôme  $P_n$ . Or celui-ci est de degré  $2n-2$ , donc il n'y en a pas d'autres. L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $P_n(x) = 0$  est donc  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}_{[-1,1]} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{2n} \mid 0 < k < n \right\} \cup \left\{ -\sin \frac{k\pi}{2n} \mid 0 < k < n \right\}$

b) Posons  $u_n = \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n}$ .

Le produit des racines du polynôme  $P_n$  est  $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n} \times \prod_{k=1}^n \left( -\sin \frac{k\pi}{2n} \right) = (-1)^{n-1} \left( \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n} \right)^2 = (-1)^{n-1} u_n^2$ . Or  $P_n$  est un polynôme scindé de degré  $2n-2$ , son coefficient constant est  $P_n(0) = 2n$  et son coefficient dominant est  $(-1)^{n-1} 2^{2n-1}$ , donc le produit de ses racines est égal à  $(-1)^{2n-2} \frac{2n}{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{2n-2}}$  (cf cours).

On a donc  $(-1)^{n-1} u_n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{2n-2}}$  d'où  $u_n = \sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ .