

Corrigé DM21

Exercice : Une balançoire

1. Le moment d'inertie de M vaut $(m - \mu)L^2$ et celui de A vaut μOA^2 . Comme OM et OA sont perpendiculaires on applique le théorème de Pythagore : $OA^2 = L^2 + a^2$. On conclut que le moment d'inertie de l'enfant vaut : $J = (m - \mu)L^2 + \mu(L^2 + a^2) \iff J = mL^2 + \mu a^2$. Le raisonnement est identique pour les deux positions des jambes.

2. On étudie le système {balançoire + enfant} dans le cas où les jambes sont en arrière ($0 < t < T/2$). Ce système est soumis au poids $\vec{P} = (m - \mu)\vec{g}$ qui s'applique en M , au poids $\vec{P}' = \mu\vec{g}$ qui s'applique en A et à la réaction de l'axe \vec{R} qui s'applique en O . On applique le théorème du moment cinétique par rapport à (Oz) , dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}') + \mathcal{M}_z(\vec{R})$.

Le bras de levier de \vec{R} est nul, celui de \vec{P} vaut $L \sin \theta$ et celui de \vec{P}' vaut $L \sin \theta - a \cos \theta$ (voir ci-contre). Dans l'approximation des petits angles on suppose $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$(mL^2 + \mu a^2)\ddot{\theta} = -(m - \mu)gL \sin \theta - \mu g(L \sin \theta - a \cos \theta)$$

ce qui donne après simplifications : $\ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + \mu a^2} \theta = \frac{\mu ga}{mL^2 + \mu a^2}$.

Le raisonnement est le même quand les jambes sont vers l'avant. La seule différence tient au bras de levier de \vec{P}' , qui vaut désormais $L \sin \theta + a \cos \theta$. On montre alors que l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + \mu a^2} \theta = -\frac{\mu ga}{mL^2 + \mu a^2}$$

En conclusion l'équation du mouvement de l'enfant s'écrit : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = E_{\text{exc}}(t)$, avec :

- une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2 + \mu a^2}}$,

- une fonction excitatrice $E_{\text{exc}}(t)$ **rectangulaire** d'amplitude $A = \frac{\mu ga}{mL^2 + \mu a^2}$.

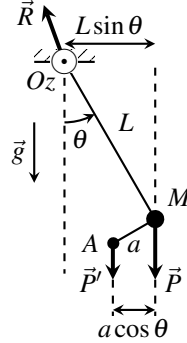
3. En tenant compte uniquement du terme d'excitation fondamental l'équation du mouvement devient : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{4A}{\pi} \sin(\omega t) = \frac{4A}{\pi} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$. On passe l'équation différentielle dans l'espace complexe :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\underline{\Theta} = \frac{4A}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{4A}{\pi} \iff \underline{\Theta} = -j\frac{4A}{\pi} \times \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

4. L'amplitude des oscillations en régime permanent vaut $\theta_m = |\underline{\Theta}| = \frac{4A}{\pi} \times \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

Il y a résonance en $\omega = \omega_0$ et l'amplitude des oscillations **diverge**. Le graphe fourni nous aide à en comprendre la raison ; le régime transitoire (qui précède le régime permanent) montre des oscillations d'amplitude croissante. Cela s'explique par le fait que le système reçoit de l'énergie à chaque oscillation, or on a négligé tout effet dissipatif donc l'énergie du système peut s'accumuler jusqu'à devenir arbitrairement élevée.

D'un point de vue mécanique il faut considérer la balançoire et l'enfant comme un système **déformable**. L'énergie des oscillations amplifiées provient du **travail des forces intérieures** que l'enfant développe lorsqu'il bascule ses jambes dans un sens puis dans l'autre.



Corrigé DM21

Exercice : Une balançoire

1. Le moment d'inertie de M vaut $(m - \mu)L^2$ et celui de A vaut μOA^2 . Comme OM et OA sont perpendiculaires on applique le théorème de Pythagore : $OA^2 = L^2 + a^2$. On conclut que le moment d'inertie de l'enfant vaut : $J = (m - \mu)L^2 + \mu(L^2 + a^2) \iff J = mL^2 + \mu a^2$. Le raisonnement est identique pour les deux positions des jambes.

2. On étudie le système {balançoire + enfant} dans le cas où les jambes sont en arrière ($0 < t < T/2$). Ce système est soumis au poids $\vec{P} = (m - \mu)\vec{g}$ qui s'applique en M , au poids $\vec{P}' = \mu\vec{g}$ qui s'applique en A et à la réaction de l'axe \vec{R} qui s'applique en O . On applique le théorème du moment cinétique par rapport à (Oz) , dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}') + \mathcal{M}_z(\vec{R})$.

Le bras de levier de \vec{R} est nul, celui de \vec{P} vaut $L \sin \theta$ et celui de \vec{P}' vaut $L \sin \theta - a \cos \theta$ (voir ci-contre). Dans l'approximation des petits angles on suppose $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$(mL^2 + \mu a^2)\ddot{\theta} = -(m - \mu)gL \sin \theta - \mu g(L \sin \theta - a \cos \theta)$$

ce qui donne après simplifications : $\ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + \mu a^2} \theta = \frac{\mu ga}{mL^2 + \mu a^2}$.

Le raisonnement est le même quand les jambes sont vers l'avant. La seule différence tient au bras de levier de \vec{P}' , qui vaut désormais $L \sin \theta + a \cos \theta$. On montre alors que l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + \mu a^2} \theta = -\frac{\mu ga}{mL^2 + \mu a^2}$$

En conclusion l'équation du mouvement de l'enfant s'écrit : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = E_{\text{exc}}(t)$, avec :

- une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2 + \mu a^2}}$,

- une fonction excitatrice $E_{\text{exc}}(t)$ **rectangulaire** d'amplitude $A = \frac{\mu ga}{mL^2 + \mu a^2}$.

3. En tenant compte uniquement du terme d'excitation fondamental l'équation du mouvement devient : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{4A}{\pi} \sin(\omega t) = \frac{4A}{\pi} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$. On passe l'équation différentielle dans l'espace complexe :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\underline{\Theta} = \frac{4A}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{4A}{\pi} \iff \underline{\Theta} = -j\frac{4A}{\pi} \times \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

4. L'amplitude des oscillations en régime permanent vaut $\theta_m = |\underline{\Theta}| = \frac{4A}{\pi} \times \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

Il y a résonance en $\omega = \omega_0$ et l'amplitude des oscillations **diverge**. Le graphe fourni nous aide à en comprendre la raison ; le régime transitoire (qui précède le régime permanent) montre des oscillations d'amplitude croissante. Cela s'explique par le fait que le système reçoit de l'énergie à chaque oscillation, or on a négligé tout effet dissipatif donc l'énergie du système peut s'accumuler jusqu'à devenir arbitrairement élevée.

D'un point de vue mécanique il faut considérer la balançoire et l'enfant comme un système **déformable**. L'énergie des oscillations amplifiées provient du **travail des forces intérieures** que l'enfant développe lorsqu'il bascule ses jambes dans un sens puis dans l'autre.

