Devoir n°22 (non surveillé)

EXERCICE 1

Les propositions suivantes, où (u_n), (v_n) et (a_n) sont des suites réelles qui ne s'annulent pas, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) $u_{n+1} \sim u_n$.

2) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_{2n} \sim v_{2n}$.

3) Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

4) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \sim v_n$.

5) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim \ell$.

6) Si $u_n = o(v_n)$ alors $a_n u_n = o(a_n v_n)$.

7) Si $a_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et que $u_n \sim v_n$ alors $a_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

8) Si $u_n \sim v_n$ et que (v_n) est croissante alors (u_n) aussi.

9) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sin u_n \sim \sin v_n$.

10) Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sin u_n \sim \sin v_n$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x - \sin x$. On note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Quel est le signe de $\sin x$ lorsque $x \in I_n$?

b) Étudier, en fonction de la parité de n, les variations de f sur I_n. On précisera les valeurs de $f(n\pi)$ et de $f((n+1)\pi)$.

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I_n une solution unique. On note x_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

2) a) Déterminer la limite et un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_n \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ puis que $\tan x_n = x_n$ et enfin que $x_n = n\pi + \operatorname{Arctan} x_n$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ *(indication : dériver).*

d) En déduire que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Devoir n°22 (non surveillé)

EXERCICE 1

Les propositions suivantes, où (u_n), (v_n) et (a_n) sont des suites réelles qui ne s'annulent pas, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) $u_{n+1} \sim u_n$.

2) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_{2n} \sim v_{2n}$.

3) Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

4) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \sim v_n$.

5) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim \ell$.

6) Si $u_n = o(v_n)$ alors $a_n u_n = o(a_n v_n)$.

7) Si $a_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et que $u_n \sim v_n$ alors $a_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

8) Si $u_n \sim v_n$ et que (v_n) est croissante alors (u_n) aussi.

9) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sin u_n \sim \sin v_n$.

10) Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sin u_n \sim \sin v_n$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x - \sin x$. On note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Quel est le signe de $\sin x$ lorsque $x \in I_n$?

b) Étudier, en fonction de la parité de n, les variations de f sur I_n. On précisera les valeurs de $f(n\pi)$ et de $f((n+1)\pi)$.

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I_n une solution unique. On note x_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

2) a) Déterminer la limite et un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_n \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ puis que $\tan x_n = x_n$ et enfin que $x_n = n\pi + \operatorname{Arctan} x_n$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ *(indication : dériver).*

d) En déduire que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.