Correction du DNS 21

1) On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1$$

mais

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x}$ n'existe pas.

2) On a $\sin X \sim X$ au voisinage de 0, donc $\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$. Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 1.$$

3) On pose $h = x-1$ (donc $x = 1+h$). La limite devient

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\ln x) - 1}{(x-1)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\ln(1+h)) - 1}{h^2}.$$

On détermine le DL du numérateur à l'ordre 2 en 0 :

$$\cos(\ln(1+h)) - 1 = \cos(h+o(h)) - 1 = 1 - \frac{(h+o(h))^2}{2} + o(h^2) - 1 = -\frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Par conséquent

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\ln(1+h)) - 1}{h^2} = -\frac{1}{2}.$$

4) Au voisinage de $+\infty$:

$$2x+3 \sim 2x \ ; \ \sqrt{x^2+1} \sim \sqrt{x^2} \sim x \ ; \ \ln(\operatorname{ch} x) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \ln(e^x+e^{-x}) - \ln 2 \sim \ln e^x \sim x$$

et le cosinus est borné, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+3)\sqrt{x^2+1}}{x\ln(\operatorname{ch} x) + \cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

5) On commence par déterminer le DL de Arcsin à l'ordre 3 en 0. Au voisinage de 0 on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc en primitivant (avec $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$) :

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On peut alors calculer la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arctan} x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = -1.$$

6) On peut faire le changement de variable $h = x + \pi/4$ (donc $x = -\pi/4 + h$). La limite devient :

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4x+\pi} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(-\pi/4+h) + \sin(-\pi/4+h)}{4(-\pi/4+h)+\pi} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin h}{4h} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

en utilisant les formules d'addition. On pouvait aussi transformer $\cos x + \sin x$ en $\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$ ou faire apparaître un taux d'accroissement.

7) On met l'expression sous forme exponentielle :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\ln(1+x)}{\sin x}}.$$

On détermine la limite de l'exposant en utilisant les DL. Au voisinage de 0 :

$$\ln \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \ln \frac{x - x^2/2 + o(x^2)}{x + o(x^2)} = \ln(1 - x/2 + o(x)) = -x/2 + o(x)$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = -\frac{1}{2}$$

et donc

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{\ln(1+x)}{\sin x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

8) On multiplie par la quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}$$

qui tend vers $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ lorsque x tend vers 4. On pouvait aussi commencer par poser $h = x - 4$.

9) On rassemble les logarithmes :

$$\lim_{x \to +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2)) = \lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{x}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \left(-x \ln \frac{x+2}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right) = -2$$

car $\ln \left(1 + \dfrac{2}{x} \right) \sim \dfrac{2}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

10) On pose $h = x - 1$ (donc $x = 1 + h$). La limite devient

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h - \ln(1+h)}{h \ln(1+h)} \right).$$

Or $h \ln(1+h) \sim h^2$ et

$$h - \ln(1+h) = h - (h - h^2/2 + o(h^2)) = h^2/2 + o(h^2)$$

au voisinage de 0, donc

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{h - \ln(1+h)}{h \ln(1+h)} \right) = \frac{1}{2}.$$