Devoir n°24 (non surveillé)

EXERCICE 1

On considère la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$.

1) Étudier la monotonie de la suite (I_n). En déduire qu'elle est convergente.

2) Déterminer la limite de la suite (I_n) en majorant e^{-x} pour tout x de $[0,1]$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n, la relation $I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.

4) En déduire que $I_n \sim \dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

5) Déterminer un équivalent de $I_n - \dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 2

À toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on associe les sommes :

$$\begin{array}{lll} s_1 = a+b+c & s_4 = a+d+g & s_7 = a+e+i \\ s_2 = d+e+f & s_5 = b+e+h & s_8 = c+e+g \\ s_3 = g+h+i & s_6 = c+f+i & \end{array}$$

On dit que M est une **matrice magique** si $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = s_8$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques, $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle, $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques et $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}(J)$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1) Montrer que si M et N sont des matrices magiques et que $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $M+N$ et αM sont magiques. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{M}$?

2) a) Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner une base et la dimension de chacun d'eux. *On écrira chacun de ces ensembles comme un Vect, inutile de vérifier la stabilité par les opérations.*

b) Déterminer $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ et en déduire que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

c) Montrer que la transposée d'une matrice magique est une matrice magique puis que $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \oplus (\mathcal{M} \cap \mathcal{A})$.

3) a) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ puis de $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

c) Montrer que $\mathcal{S} = (\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \oplus \mathcal{V}$ puis que $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \oplus \mathcal{V}$.

4) a) Déduire de ce qui précède une base et la dimension de $\mathcal{M}$ et montrer que les matrices magiques sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x+z & -x+y+z & -y+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x-y+z & -x+z \end{pmatrix}$$

avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe une unique matrice magique dont la première ligne est $(3 \quad 4 \quad 5)$ et écrire cette matrice.