Corrigé DM22

Exercice : Équilibre vertical d'un piston

Avant de déterminer le déplacement du piston on cherche à décrire l'état d'équilibre final dans les deux compartiments. Il y a **six inconnues** à déterminer : $P_1, V_1, T_1, P_2, V_2, T_2$. On cherche un système de six équations reliant ces inconnues entre elles :

• Les parois de l'enceinte sont diathermes donc dans l'état final le gaz de chaque compartiment est en **équilibre thermique avec l'extérieur** : $\boxed{T_1 = T_0 \ (1)}$ et $\boxed{T_2 = T_0 \ (2)}$;

• l'enceinte est indéformable donc **le volume total se conserve** : $\boxed{V_1 + V_2 = 2V_0 \ (3)}$;

• Le piston est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ (vecteur unitaire $\vec{u}_z$ vertical ascendant) et aux forces pressantes exercées par le gaz de part et d'autre $\vec{F}_1 = -P_1 S\vec{u}_z$ et $\vec{F}_2 = P_2 S\vec{u}_z$. Dans l'état final il est en **équilibre mécanique**, ce qui se traduit par :

$$P_2 S - P_1 S - mg = 0 \iff P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} \iff \boxed{P_2 = P_1 + P_0 \ (4)}$$

• le piston est étanche donc la quantité de matière se conserve dans chaque compartiment. Sachant que $T_1 = T_2 = T_0$ on obtient à l'aide de la loi des gaz parfaits : $\boxed{P_1 V_1 = P_0 V_0 \ (5)}$ et $\boxed{P_2 V_2 = P_0 V_0 \ (6)}$.

On résout le système. Les températures sont déjà connues, il reste à déterminer les pressions et les volumes. On utilise l'équation (4) pour isoler V_1 :

$$P_2 = P_1 + P_0 \iff \frac{P_0 V_0}{V_2} = \frac{P_0 V_0}{V_1} + P_0 \iff \frac{P_0 V_0}{2V_0 - V_1} = \frac{P_0 V_0}{V_1} + P_0 \iff \frac{1}{2V_0 - V_1} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_0}$$

Après simplifications on trouve $\boxed{V_1 = \sqrt{2}V_0}$. À partir de ce résultat on obtient rapidement les trois derniers : $\boxed{V_2 = (2 - \sqrt{2})V_0}$; $\boxed{P_1 = \frac{P_0}{\sqrt{2}}}$; $\boxed{P_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) P_0}$

On détermine maintenant le déplacement du piston. On mesure son altitude z à partir du pied de l'enceinte. Son altitude initiale est $z_0 = \frac{V_0}{S}$ et son altitude finale $z = \frac{V_2}{S}$. Son déplacement est donc :

$$\Delta z = \frac{V_2 - V_0}{S} \iff \boxed{\Delta z = (1 - \sqrt{2})\frac{V_0}{S}}$$

Corrigé DM22

Exercice : Équilibre vertical d'un piston

Avant de déterminer le déplacement du piston on cherche à décrire l'état d'équilibre final dans les deux compartiments. Il y a **six inconnues** à déterminer : $P_1, V_1, T_1, P_2, V_2, T_2$. On cherche un système de six équations reliant ces inconnues entre elles :

• Les parois de l'enceinte sont diathermes donc dans l'état final le gaz de chaque compartiment est en **équilibre thermique avec l'extérieur** : $\boxed{T_1 = T_0 \ (1)}$ et $\boxed{T_2 = T_0 \ (2)}$;

• l'enceinte est indéformable donc **le volume total se conserve** : $\boxed{V_1 + V_2 = 2V_0 \ (3)}$;

• Le piston est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ (vecteur unitaire $\vec{u}_z$ vertical ascendant) et aux forces pressantes exercées par le gaz de part et d'autre $\vec{F}_1 = -P_1 S\vec{u}_z$ et $\vec{F}_2 = P_2 S\vec{u}_z$. Dans l'état final il est en **équilibre mécanique**, ce qui se traduit par :

$$P_2 S - P_1 S - mg = 0 \iff P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} \iff \boxed{P_2 = P_1 + P_0 \ (4)}$$

• le piston est étanche donc la quantité de matière se conserve dans chaque compartiment. Sachant que $T_1 = T_2 = T_0$ on obtient à l'aide de la loi des gaz parfaits : $\boxed{P_1 V_1 = P_0 V_0 \ (5)}$ et $\boxed{P_2 V_2 = P_0 V_0 \ (6)}$.

On résout le système. Les températures sont déjà connues, il reste à déterminer les pressions et les volumes. On utilise l'équation (4) pour isoler V_1 :

$$P_2 = P_1 + P_0 \iff \frac{P_0 V_0}{V_2} = \frac{P_0 V_0}{V_1} + P_0 \iff \frac{P_0 V_0}{2V_0 - V_1} = \frac{P_0 V_0}{V_1} + P_0 \iff \frac{1}{2V_0 - V_1} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_0}$$

Après simplifications on trouve $\boxed{V_1 = \sqrt{2}V_0}$. À partir de ce résultat on obtient rapidement les trois derniers : $\boxed{V_2 = (2 - \sqrt{2})V_0}$; $\boxed{P_1 = \frac{P_0}{\sqrt{2}}}$; $\boxed{P_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) P_0}$

On détermine maintenant le déplacement du piston. On mesure son altitude z à partir du pied de l'enceinte. Son altitude initiale est $z_0 = \frac{V_0}{S}$ et son altitude finale $z = \frac{V_2}{S}$. Son déplacement est donc :

$$\Delta z = \frac{V_2 - V_0}{S} \iff \boxed{\Delta z = (1 - \sqrt{2})\frac{V_0}{S}}$$