

Correction du DNS 22

EXERCICE 1

- 1) C'est faux. Contre-exemple : $u_n = e^n$. On a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$ qui ne tend pas vers 1.
- 2) C'est vrai : si $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 alors $\frac{u_{2n}}{v_{2n}}$ aussi (suite extraite).
- 3) C'est faux. Contre-exemple : $n+1 \sim n$ mais $(n+1) - n$ tend vers 1.
- 4) C'est faux. Contre-exemple : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ tend vers 0 mais $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$.
- 5) C'est vrai : $\frac{u_n}{\ell}$ tend vers 1 donc $u_n \sim \ell$.
- 6) C'est vrai : $\frac{a_n u_n}{a_n v_n} = \frac{u_n}{v_n}$ tend vers 0.
- 7) C'est faux. Contre-exemple : $a_n = u_n = n$ et $v_n = n - 1$.
- 8) C'est faux. Contre-exemple : $v_n = n$ et $u_n = n + (-1)^n$. La suite (v_n) est croissante, on a $u_n \sim v_n$, mais la suite (u_n) n'est pas croissante : $(u_n) = (1, 0, 3, 2, 5, 4, \dots)$. On peut aussi prendre $u_n = 1 + 1/n$ (qui est décroissante) et $v_n = 1 - 1/n$ (qui est croissante).
- 9) C'est faux. Contre-exemple : $u_n = n$ et $v_n = n + \pi$. On a $u_n \sim v_n$ mais $\sin v_n = -\sin u_n$ donc $\frac{\sin u_n}{\sin v_n}$ tend vers -1 .
- 10) C'est vrai : $\sin x \sim x$ au voisinage de 0 donc $\sin u_n \sim u_n \sim v_n \sim \sin v_n$.

EXERCICE 2

1) a) Si n est pair alors $\sin x > 0$ pour tout $x \in]n\pi, (n+1)\pi[$, et si n est impair alors $\sin x < 0$ pour tout $x \in]n\pi, (n+1)\pi[$. Dans les deux cas, $\sin x$ s'annule en $n\pi$ et $(n+1)\pi$.

b) D'après les théorèmes sur les opérations, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

qui est du signe de $-\sin x$ sur I_n .

Si n est pair, alors f est strictement décroissante sur I_n . On a $f(n\pi) = n\pi \cos(n\pi) - \sin(n\pi) = n\pi$ et $f((n+1)\pi) = (n+1)\pi \cos((n+1)\pi) - \sin((n+1)\pi) = -(n+1)\pi$.

Si n est impair, alors f est strictement croissante sur I_n . On a $f(n\pi) = n\pi \cos(n\pi) - \sin(n\pi) = -n\pi$, et $f((n+1)\pi) = (n+1)\pi \cos((n+1)\pi) - \sin((n+1)\pi) = (n+1)\pi$.

c) La fonction f est continue et strictement monotone sur I_n et $f(n\pi)$ et $f((n+1)\pi)$ sont de signes contraires donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n) = 0$.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n\pi \leq x_n \leq (n+1)\pi$ donc la suite (x_n) tend vers $+\infty$ et, d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents, $x_n \sim n\pi$ au voisinage de $+\infty$.

b) On a $f(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (n\pi + \frac{\pi}{2}) \cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) - \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \neq 0$ donc $x_n \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Par définition de x_n on a $x_n \cos x_n - \sin x_n = 0$ donc $x_n \cos x_n = \sin x_n$ et donc $\tan x_n = x_n$ (on peut diviser car $\cos x_n \neq 0$ d'après ce qui précède).

Rappel : $\tan a = \tan b$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\pi$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_n = \text{Arctan } x_n + k\pi$. Or $n\pi \leq x_n \leq (n+1)\pi$ et $0 \leq \text{Arctan } x_n \leq \frac{\pi}{2}$ donc on doit avoir $k = n$ et donc $x_n = \text{Arctan } x_n + n\pi$.

c) Considérons la fonction $g : x \mapsto \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

La fonction g est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus $g(1) = \text{Arctan } 1 + \text{Arctan } 1 = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$ donc cette constante vaut $\pi/2$. On a donc bien

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

pour tout $x > 0$.

d) On a donc $x_n = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{1}{x_n} + n\pi$, d'où $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \text{Arctan} \frac{1}{x_n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ et $\text{Arctan} u \sim u$ au voisinage de 0 donc $\text{Arctan} \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$ au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ on a donc $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$, ce que l'on peut aussi écrire

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$