# DS de physique n° 6

Durée : 3h

*L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et* ***les résultats soulignés ou encadrés****. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 4 exercices indépendants.*

## Exercice 1 : Comète dans le système solaire

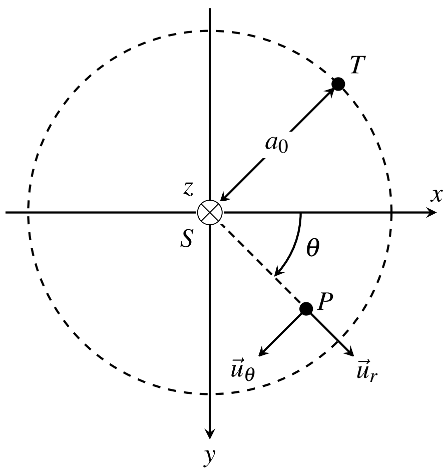



FIGURE 1

Dans cet exercice les mouvements sont étudiés dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.
*Données* : Masse du soleil : $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$, constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

**1.** On suppose que la Terre suit une orbite circulaire autour du soleil à la vitesse $v_0 = 30\,\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le rayon $a_0$ de l'orbite.

On munit le référentiel héliocentrique d'un repère cartésien $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ représenté sur la figure 1. On suppose qu'une comète $P$ de masse $m$, dont la trajectoire est coplanaire avec la Terre, se trouve à l'instant $t = 0$ dans la position $\vec{r}(t=0) = \frac{a_0}{2}\vec{u}_x$ avec une vitesse $\vec{v}(t=0) = 2v_0\vec{u}_y$. On définit également le repère cylindrique $(S, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ de sorte que la position angulaire $\theta$ de la comète est nulle à $t = 0$. Dans les questions qui suivent on s'intéresse au mouvement de la comète.

**2.** Exprimer l'énergie mécanique de la comète. Quelle est la nature de sa trajectoire ? Est-elle dans un état lié ou diffus ?
**3.** Montrer que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ se conserve puis l'exprimer en fonction de $v_0$ et $a_0$.
**4.** Montrer, à l'aide du principe fondamental de la dynamique, que le vecteur $\vec{v} - v_0\vec{u}_\theta$ se conserve. En déduire à tout instant l'expression de $\vec{v}$ en fonction de $v_0$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_y$.
**5.** Exprimer $\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta$ et en déduire l'équation de la trajectoire de la comète : $r(\theta) = \frac{a_0}{1+\cos\theta}$.

On étudie l'éventualité d'une collision entre la comète et la Terre. Dans les questions qui suivent on se place à l'instant $t_0 > 0$ où la comète croise l'orbite terrestre.

**6.** Quelle est la position angulaire $\theta(t_0)$ de la comète à la date $t_0$ ? Reproduire la figure ci-dessus et tracer l'allure de la trajectoire de la comète.
**7.** Calculer la vitesse de la comète relativement à la Terre $\|\vec{v} - \vec{v}_{\text{Terre}}\|$ dans l'éventualité d'une collision. On suppose que la rotation de la comète autour du soleil est dans le même sens que celle de la Terre.

## Exercice 2 : Équilibrage et dynamique d'une machine tournante

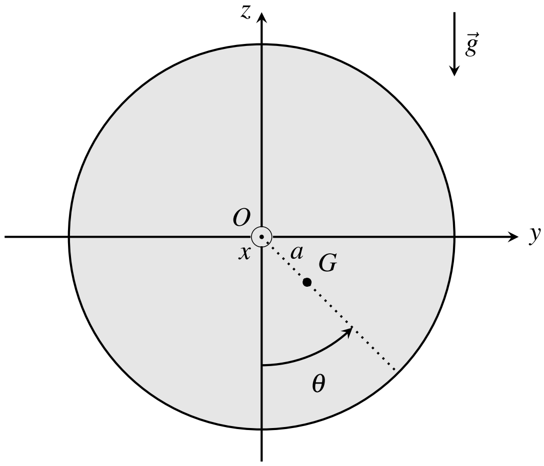



FIGURE 2 : *Déséquilibre d'une machine tournante*

On modélise très simplement une machine tournante par un disque de masse $m$ et de rayon $R$ pouvant tourner sans frottement autour d'un axe $Ox$ horizontal passant par son centre $O$, supposé fixe dans le référentiel terrestre galiléen. Idéalement, ce type de machine est usiné de telle sorte que son centre d'inertie $G$ se trouve exactement sur l'axe de rotation, en $O$ (la machine est dite **équilibrée**). En réalité, il est fréquent que $G$ se trouve à une distance $OG = a \ll R$ de l'axe (voir figure 2 qui n'est pas représentée à l'échelle par souci de clarté). La machine est alors déséquilibrée.

Le champ de pesanteur vaut $g = 9,8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

On admet le résultat suivant : si $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ sont deux solides de masses respectives $m_1$ et $m_2$, de centres d'inertie respectifs $G_1$ et $G_2$, alors le centre d'inertie $G$ de $\{(\mathscr{S}_1)+(\mathscr{S}_2)\}$ vérifie :

$$m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$$

### Partie 1 : Recherche de la position de $G$

Dans un premier temps, on fait tourner la machine autour de $(Ox)$ jusqu'à ce qu'elle se trouve en équilibre.

**1.** Où peut alors se trouver le point $G$ ? Justifier. Discuter qualitativement de la stabilité de l'équilibre dans chaque cas et expliquer quelle est la seule possibilité envisageable en pratique.

La position déterminée à la question précédente permet de définir une direction de référence par rapport à laquelle on peut mesurer la position angulaire $\theta$ de la machine autour de l'axe $Ox$ (voir figure 2). Dans les questions suivantes, on fait l'hypothèse que $a$ est suffisamment faible pour assimiler le moment d'inertie $J_x$ de la machine par rapport à l'axe $Ox$ à celui d'un disque homogène par rapport à son axe de symétrie de révolution. On prendra donc $J_x = \frac{1}{2}mR^2$.

**2.** Faire soigneusement le bilan des forces qui s'exercent sur la machine.

**3.** En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation du mouvement de la machine. Simplifier cette équation dans l'approximation des petits angles et exprimer la période $T$ des oscillations en fonction de $R$, $g$ et $a$.

**4.** AN : Sachant que $R = 50\,\mathrm{cm}$ et $T = 71\,\mathrm{s}$, calculer $a$.

### Partie 2 : Équilibrage de la machine

Un moteur non représenté sur le schéma permet de mettre en mouvement la machine à la vitesse angulaire $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ constante. On désigne par $\vec{R}$ la réaction exercée par l'axe $Ox$ sur la machine.

**5.** En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la réaction de l'axe s'écrit sous la forme :

$$\vec{R} = -m\omega^2\overrightarrow{OG} - m\vec{g}$$

**6.** On se place dans le cas où $a\omega^2 > g$. Exprimer les valeurs extrêmes de $R = \|\vec{R}\|$ au cours du temps puis sa moyenne temporelle $\langle R \rangle$.

**7.** AN : calculer $\langle R \rangle$ sachant que la machine tourne à 3000 tours/min et que $m = 200\,\text{kg}$. Conclure quand à l'effet du déséquilibre sur le mouvement de rotation de la machine.

On équilibre la machine en plaçant un **balourd**, c'est-à-dire une masse ponctuelle $m'$, sur la circonférence de la machine de sorte que le centre d'inertie du système {machine + balourd} soit confondu avec le point $O$.

**8.** Expliquer en détail la position dans laquelle il faut placer le balourd et la valeur de $m'$ qu'il faut choisir. Faire l'application numérique.

**Dans toute la suite du problème**, la machine est supposée équilibrée.

### Partie 3 : Mise en mouvement de la machine

La machine est mise en mouvement par un couple moteur $\Gamma_m$ et fait tourner une charge, ce qui produit un couple résistant $\Gamma_r$. Lors d'une mise en route, ces deux couples sont supposés indépendants du temps et tels que $\Gamma_m > 0$ et $\Gamma_r < 0$. Se rajoutent à cela des frottements visqueux qui exercent un couple de frottement $\Gamma_f = -\alpha\dot{\theta}$.

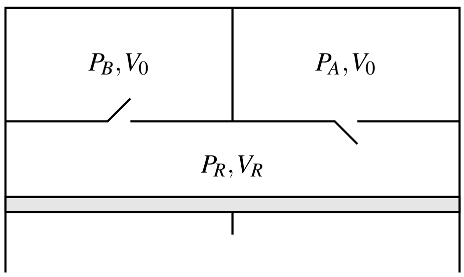
**9.** À quelle condition sur $\Gamma_m$ et $\Gamma_r$ la machine peut-elle effectivement entrer en rotation ?
**10.** Établir l'équation du mouvement de la machine. On introduira un temps caractéristique $\tau$ que l'on exprimera en fonction de $J_x$ et $\alpha$. Montrer que la vitesse angulaire $\omega$ tend vers une valeur asymptotique $\omega_\infty$ que l'on exprimera en fonction de $\Gamma_m$, $\Gamma_r$ et $\alpha$.
**11.** Sachant qu'on exerce le couple $\Gamma_m$ à partir de la date $t = 0$ et qu'à cet instant la machine est immobile, exprimer $\omega(t)$ et tracer son graphe.
**12.** AN : À vide (c'est-à-dire sans charge), la machine tourne en régime stationnaire à 3000 tours/min lorsqu'on lui impose un couple $\Gamma_m = 70\,\text{SI}$. Calculer la puissance délivrée par le moteur qui entraîne la machine et la puissance dissipée par frottements.
**13.** Quelle est l'unité SI d'un couple ?

a) $\text{N}\cdot\text{kg}$ b) $\text{N}\cdot\text{m}$ c) $\text{N}\cdot\text{s}$ d) N

Justifier votre choix.

## Exercice 3 : Fonctionnement d'un compresseur

Un compresseur remplit d'air l'enceinte $B$ de volume $V_0$ fixe en le prélevant dans l'enceinte $A$ de même volume $V_0$ fixe. La circulation de l'air passe par un réservoir dont le volume $V_R$ varie sous l'effet du déplacement d'un piston. Le volume minimal du réservoir est nul et son volume maximal vaut $V_M$. Des clapets anti-retour imposent le déplacement de l'air dans le sens $A \to$ réservoir $\to B$ . On suppose que la température de l'air est partout et à tout moment égale à la température extérieure $T_0$. On note $P_{A,N}$ et $P_{B,N}$ les pressions qui règnent respectivement dans l'enceinte $A$ et dans l'enceinte $B$, après $N$ aller-retours du piston.




Dans l'état initial $P_{A,0} = P_{B,0} = P_0$ et $V_R = 0$. L'air est assimilé à un gaz parfait.

**1.** On effectue un premier aller-retour avec le piston. Déterminer la quantité de matière $n_1$ qui a été échangée entre les deux enceintes, puis les pressions $P_{A,1}$ et $P_{B,1}$.
**2.** Déterminer une relation de récurrence entre $P_{A,N+1}$ et $P_{A,N}$. En déduire l'expression de $P_{A,N}$ puis celle de $P_{B,N}$ pour $N$ quelconque, en fonction de $P_0$, $V_0$, $V_M$ et $N$.
Déterminer les valeurs limites $P_{A,\infty}$ et $P_{B,\infty}$ de ces pressions. Commenter.
**3.** On suppose à présent que le réservoir a un volume minimal $V_m$ non nul, appelé "volume nuisible". Déterminer la pression maximale que l'on peut atteindre dans l'enceinte $B$.