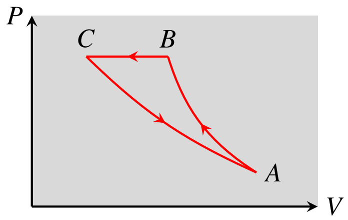
Corrigé DM23

Exercice 1 : Cycle d'un gaz parfait

1. On représente le cycle ci-dessous :



Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc il est $\boxed{\text{récepteur}}$.

2. La transformation $A \to B$ est adiabatique réversible et le gaz est parfait donc on peut appliquer les **lois de Laplace** :

$$\begin{cases} P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \\ P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{V_B = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{1/\gamma} V_A = 0{,}32\,\mathrm{L}} \\ \boxed{T_B = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} T_A = 475\,\mathrm{K}} \end{cases}$$

Pour l'application numérique on a pris $\gamma = 1{,}4$ car le gaz parfait est diatomique.

La transformation $B \longrightarrow C$ est isobare donc $P_C = P_B$. La transformation $C \to A$ est isotherme donc :

$$P_C V_C = P_A V_A \iff \boxed{V_C = \frac{P_A}{P_C} V_A = \frac{P_A}{P_B} V_A = 0{,}20\,\mathrm{L}}$$

3. La transformation $A \to B$ est adiabatique donc $\boxed{Q_{AB} = 0}$.

La transformation $B \longrightarrow C$ est isobare. On applique le premier principe (il n'y a pas de travaux autres que ceux des forces de pression) : $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = \frac{7}{2} nR(T_C - T_B)$.

On détermine la quantité de matière à l'aide de la loi des GP (dans l'état B par exemple : $nR = \frac{P_B V_B}{T_B}$) :

$$\boxed{Q_{BC} = \frac{7}{2} P_B V_B \left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right) = -204\,\mathrm{J}}$$

La transformation $C \to A$ est isotherme donc $\Delta U_{CA} = 0$. On applique le premier principe :

$$\Delta U_{CA} = 0 = W_{CA} + Q_{CA} \iff Q_{CA} = -W_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C}$$

On utilise la loi des gaz parfaits dans l'état A :

$$\boxed{Q_{CA} = P_A V_A \ln \frac{V_A}{V_C} = 161\,\mathrm{J}}$$

4. On applique le premier principe sur un cycle :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{BC} + Q_{CA} \iff \boxed{W_{\text{cycle}} = -Q_{BC} - Q_{CA} = 43\,\mathrm{J}}$$

Exercice 2 : Fuites thermiques d'un réfrigérateur

1. Un transfert thermique s'effectue spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Or ici l'intérieur du réfrigérateur est plus froid que l'air de la cuisine donc la puissance thermique $\mathscr{P}_{th}$ mesurée de l'extérieur vers l'intérieur du réfrigérateur est **positive**. Enfin puisque $T < T_\mathrm{c}$ on en déduit que $\boxed{\lambda > 0}$.

2. Le transfert thermique infinitésimal reçu vaut $\boxed{\delta Q = \mathscr{P}_\mathrm{th} \mathrm{d}t}$.

3. On applique le premier principe à l'intérieur du réfrigérateur, entre t et $t + \mathrm{d}t$. La transformation est **isobare** (équilibre mécanique permanent entre l'intérieur et l'extérieur du réfrigérateur) et le système ne reçoit aucun travail autre que ceux des forces de pression donc :

$$\mathrm{d}H = \delta Q \iff C_P \mathrm{d}T = \mathscr{P}_\mathrm{th} \mathrm{d}t$$

$$\iff \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda(T_\mathrm{c} - T)}{C_P}$$

$$\iff \boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{C_P} T = \frac{\lambda}{C_P} T_\mathrm{c}}$$

Par identification $\boxed{\tau = \frac{C_P}{\lambda}}$ et $\boxed{T_\infty = T_\mathrm{c}}$.

4. On résout cette équation différentielle. La solution générale est :

$$T(t) = T_\mathrm{c} + A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Avec la condition initiale $T(0) = T_\mathrm{f}$ on obtient $\boxed{T(t) = T_\mathrm{c} + (T_\mathrm{f} - T_\mathrm{c})\mathrm{e}^{-t/\tau}}$

5. On lit la valeur de T_f à l'instant initial et celle de T_c au niveau de l'asymptote :

$$\boxed{T_\mathrm{f} = 277\,\mathrm{K}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_\mathrm{c} = 293\,\mathrm{K}}$$

6. On exprime littéralement la grandeur en ordonnées :

$$\frac{T(t) - T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{c}} = \mathrm{e}^{-t/\tau} \iff \ln\left(\frac{T(t) - T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{c}}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Le coefficient directeur de la droite tracée s'identifie à $-1/\tau$. On le mesure :

$$a = \frac{-5}{52 \times 3600} = -2{,}7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$$

On en déduit la valeur de λ :

$$a = -\frac{1}{\tau} = -\frac{\lambda}{C_P} \iff \boxed{\lambda = -aC_P = 8{,}0\,\mathrm{W \cdot K^{-1}}}$$

On détermine l'unité SI de λ par une analyse dimensionnelle de la relation $\mathscr{P}_\mathrm{th} = \lambda(T_\mathrm{c} - T)$.