Correction du DNS 24

EXERCICE 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 ((1-x)^{n+1} e^{-x} - (1-x)^n e^{-x}) dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} (1-x-1) dx \\ &= -\int_0^1 x(1-x)^n e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Or $x(1-x)^n e^{-x} \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$ donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

De plus $(1-x)^n e^{-x} \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$ donc $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (I_n) est donc minorée par 0.

Elle est donc convergente (et sa limite est positive).

2) Pour tout $x \in [0,1]$ on a $e^{-x} \leqslant 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_n \leqslant \int_0^1 (1-x)^n dx$. De plus

$$\int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Or $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes I_n aussi.

3) Posons $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v(x) = -e^{-x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ et $v'(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in [0,1]$. En intégrant par parties on obtient donc

$$I_{n+1} = \left[-(1-x)^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx = 1 - (n+1) I_n.$$

4) La relation précédente donne $I_n = \frac{1 - I_{n+1}}{n+1}$. Or I_{n+1} tend vers 0 en $+\infty$ donc $1 - I_{n+1}$ tend vers 1 et donc $I_n \sim \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \frac{I_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} - \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

Or $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{I_{n+1}}{n+1} \sim \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc

$$I_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{2}{n^2}$$

au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 2

1) Si on note $s_1, \ldots, s_8$ les sommes associées à M comme dans l'énoncé et $t_1, \ldots, t_8$ les sommes associées à N, alors les sommes associées à $M+N$ sont $s_1 + t_1, \ldots, s_8 + t_8$ et celles associées à αM sont $\alpha s_1, \ldots, \alpha s_8$. Si M et N sont magiques alors $s_1 + t_1 = \ldots = s_8 + t_8$ et $\alpha s_1 = \ldots = \alpha s_8$ donc $M+N$ et αM sont magiques aussi.

De plus la matrice nulle est magique donc $\mathcal{M}$ est non vide. On en déduit que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) a) Les matrices de $\mathcal{S}$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Or on peut écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aE_{11} + dE_{22} + fE_{33} + b(E_{12} + E_{21}) + c(E_{13} + E_{31}) + e(E_{23} + E_{32}) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32})$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32})$, qui est clairement libre, en est une base, donc $\dim \mathcal{S} = 6$.

De même, les matrices de $\mathcal{A}$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a(E_{12} - E_{21}) + b(E_{13} - E_{31}) + c(E_{23} - E_{32}) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A} = \text{Vect}(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32})$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32})$, qui est clairement libre, en est une base, donc $\dim \mathcal{A} = 3$.

b) Si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ alors $M^T = M$ et $M^T = -M$, donc $M = -M$, d'où $M = 0$. Par conséquent $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

De plus $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = 6 + 3 = 9 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

c) Quand on transpose une matrice, les sommes s_1, s_2, s_3 et s_4, s_5, s_6 sont interverties deux à deux et les sommes s_7 et s_8 ne changent pas. La transposée d'une matrice magique est donc magique également.

Soit M une matrice magique. D'après la question précédente il existe $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$ telles que $M = S + A$. De plus $M^T = S - A$ est magique, donc $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ aussi, et donc $S \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{A}$.

On a ainsi montré que $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) + (\mathcal{M} \cap \mathcal{A})$. De plus $(\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \cap (\mathcal{M} \cap \mathcal{A}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \mathcal{M} \cap \{0\} = \{0\}$ donc $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \oplus (\mathcal{M} \cap \mathcal{A})$.

3) a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{M} &\Leftrightarrow a + b = -a + c = -b - c = -a - b = a - c = b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{M} \cap \mathcal{A} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$: c'est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

b) Les matrices de $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ sont de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix}$, qu'on peut écrire

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ est de dimension 5 et la famille $(E_{11} - E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{22} - E_{33}, E_{23} + E_{32})$ en est une base.

Soit $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ comme ci-dessus. Alors :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{M} &\Leftrightarrow a+b+c = b+d+e = c+e-a-d = 2c+d = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+d+e=0 \\ c+e-a-d=0 \\ 2c+d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-2c+e=0 \\ 3c+e-a=0 \\ d=-2c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ e=-b+2c \\ 3c-b+2c+b+c=0 \\ d=-2c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ e=a \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$: c'est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

c) Les matrices de $\mathcal{V}$ sont de la forme αJ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais la trace de αJ est 3α donc $\alpha J \in \mathcal{T}$ si et seulement si $\alpha = 0$. Ainsi $\mathcal{T} \cap \mathcal{V} = \{0\}$ et donc $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{V} = \{0\}$ aussi.

De plus $\dim \mathcal{S} \cap \mathcal{T} + \dim \mathcal{V} = 5 + 1 = 6 = \dim \mathcal{S}$ donc $\mathcal{S} = (\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \oplus \mathcal{V}$.

Soit maintenant $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$. Il existe donc $N \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $M = N + \alpha J$. Mais αJ est magique, donc $N = M - \alpha J$ aussi, et donc $N \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

On a ainsi $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) + \mathcal{V}$. De plus $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{V} = \{0\}$, donc $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \oplus \mathcal{V}$.

4) a) D'après les questions précédentes,

$$\dim \mathcal{M} = \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) + \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{A}) = \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) + \dim \mathcal{V} + \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{A}) = 3$$

et les matrices de $\mathcal{M}$ s'écrivent de manière unique comme somme d'une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, d'une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$ et d'une matrice de $\mathcal{V}$, donc sous la forme

$$x \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & -x+y+z & -y+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x-y+z & -x+z \end{pmatrix}$$

avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) En résolvant le système $\begin{cases} x+z=3 \\ -x+y+z=4 \\ -y+z=5 \end{cases}$, on trouve $x=-1$, $y=-1$ et $z=4$, donc la matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$