Devoir n°26 (non surveillé)

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt$. On n'essaiera pas de calculer cette intégrale.

1) Justifier l'existence de $f(x)$.

2) Montrer sans calculer sa dérivée que f est décroissante.

3) Soit x_0 un réel strictement positif et soit $x \geqslant \dfrac{x_0}{2}$.

a) Montrer que $\dfrac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} \leqslant \dfrac{2e}{x_0^2}$ pour tout $t \in [0,1]$ et en déduire que $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{2e|x-x_0|}{x_0^2}$.

b) En déduire que f est continue en x_0.

4) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e-1}{x}$.

b) En déduire la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

5) a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $e^t - 1 \leqslant et$ pour tout $t \in [0,1]$.

b) En déduire que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\,dt$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

c) En déduire que $f(x) \sim -\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier.

2) Étudier la parité de f.

3) a) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

b) En déduire les variations de f.

4) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.

b) En déduire la limite et un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2} + o(x)$ au voisinage de 0. On pourra considérer $f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.