Correction du DNS 25

Partie I

1) On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2) En effectuant le changement de variable $x = \pi/2 - y$ on obtient

$$W_n = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n(\pi/2 - y)dy = \int_0^{\pi/2} \cos^n(y)dy$$

car $\sin(\pi/2 - y) = \cos y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(\sin x - 1)dx.$$

Or pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\sin^n(x) \geqslant 0$ et $\sin x - 1 \leqslant 0$ donc $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$. La suite (W_n) est décroissante.

4) On a $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\sin(x)\, dx$.

On intègre par parties. Posons $u(x) = \sin^{n+1}(x)$ et $v(x) = -\cos x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(x) = (n+1)\sin^n(x)\cos x)$ et $v'(x) = \sin x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc

$$W_{n+2} = \left[-\sin^{n+1}(x)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2 x dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2 x dx.$$

Or $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^n(x) - \sin^{n+2}(x)\right) dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

Par conséquent $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ d'où $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

5) Montrons par récurrence les formules demandées. Pour $p = 0$, ce sont les résultats de la question a).

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et que $W_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

La relation de la question précédente donne

$$W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2 2(p+1)}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+1)!(2p+2)}{(2^p p!)^2 2^2 (p+1)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3}I_{2p+1} = \frac{2(p+1)(2^p p!)^2}{(2p+1)!(2p+3)} = \frac{2^2(p+1)^2(2^p p!)^2}{(2p+1)!(2p+2)(2p+3)} = \frac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2p+3)!}.$$

Le théorème de récurrence permet de conclure.

6) La suite (W_n) est décroissante, donc, pour tout $n \geqslant 0$, on a $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant W_{n+2}$.

En divisant par W_n (qui est non nul d'après la question précédente) on obtient $1 \geqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \dfrac{W_{n+2}}{W_n}$.

Or $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$ d'après la question 4 et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ donc, par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

7) Montrons par récurrence que $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au rang initial ($n = 0$), on a $1W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$ d'après la question 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème de récurrence on a donc bien $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8) On a $(n+1)W_nW_{n+1} \sim nW_n^2$ d'après 4)e), donc $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ d'où $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

9) D'après la question 5

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{C\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{(2^n C\sqrt{n}n^n e^{-n})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}.$$

Or d'après la question 8, on a aussi $W_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

Par conséquent $C = \sqrt{2\pi}$ et donc $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (formule de Stirling).

Partie II

1) a) Posons $t = \sqrt{n}\sin x$. Alors $dt = \sqrt{n}\cos x\, dx$ et

$$I_n = \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)^n\sqrt{n}\cos x\, dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}(\cos^2 x)^n \cos x\, dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n+1}\, dx = \sqrt{n}\, W_{2n+1}.$$

On pouvait aussi poser $t = \sqrt{n}\cos x$.

b) En utilisant l'équivalent donné dans l'énoncé :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\, W_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) a) Posons $t = \sqrt{n}\tan x$. Alors $dt = \dfrac{\sqrt{n}}{\cos^2 x}\, dx$ et

$$J_n = \int_0^{\pi/4}(1+\tan^2 x)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\cos^2 x}\, dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-n}\frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/4}(\cos^2 x)^{n-1}\, dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/4}(\cos x)^{2n-2}\, dx.$$

b) La fonction cosinus est décroissante sur $[\pi/4, \pi/2]$, donc pour tout $x \in [\pi/4, \pi/2]$ on a $0 \leqslant \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^n x\, dx \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

c) Par la relation de Chasles on a

$$W_n = \int_0^{\pi/4}\cos^n x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^n x\, dx.$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, on a $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc d'après b), la deuxième intégrale est négligeable devant W_n et donc

$$W_n \sim \int_0^{\pi/4}\cos^n x\, dx.$$

Ainsi

$$J_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/4}(\cos x)^{2n-2}\, dx \sim \sqrt{n}\, W_{2n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n-2}} \sim \sqrt{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3) a) Le plus simple est de dire que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$ (sa dérivée seconde est négative) donc sa courbe est en-dessous de sa tangente à l'origine qui a pour équation $y = x$. On peut aussi étudier la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$. On peut également appliquer l'inégalité des accroissements finis à $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0, x]$. On peut enfin utiliser des intégrales :

– Pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} \leqslant \int_0^x dt$$

qui donne $\ln(1+x) \leqslant x$.

– Pour tout $t \in]-1,0]$ on a $\dfrac{1}{1+t} \geqslant 1$ donc pour tout $x \in]-1,0]$ on a

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = -\int_x^0 \frac{dt}{1+t} \leqslant -\int_x^0 dt = \int_0^x dt$$

qui donne $\ln(1+x) \leqslant x$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $t \in [0, \sqrt{n}\,[$, d'après le a),

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} \leqslant e^{n\left(-\frac{t^2}{n}\right)} = e^{-t^2},$$

qui est valable aussi en $\sqrt{n}$, et pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$:

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} \geqslant e^{-n\left(\frac{t^2}{n}\right)} = e^{-t^2}.$$

c) En intégrant l'encadrement précédent entre 0 et $\sqrt{n}$ on obtient

$$I_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leqslant J_n,$$

donc d'après les questions 1)b) et 1)c) et le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$