

Devoir n°27 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et soit f une application linéaire de E dans F . Pour montrer que f est bijective on peut entre autres :

- (i) montrer que $\text{Ker } f = \{0_E\}$, ce qui implique que f est injective et donc bijective ;
- (ii) montrer que f envoie une base de E sur une base de F ;
- (iii) deviner sa réciproque, c'est-à-dire trouver une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

Pour chacune des applications suivantes, montrer qu'elle est linéaire puis qu'elle est bijective en utilisant à chaque fois les trois méthodes précédentes.

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x)$.
- 2) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$.
- 3) $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P(X + 1)$.
- 4) $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

EXERCICE 2 - Interpolation lagrangienne

Soient x_1, \dots, x_n des réels deux à deux distincts. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

- 1) a) Montrer que φ est une application linéaire.
- b) Montrer sans calculs que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R}^n .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose

$$L_i = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(X - x_1) \dots (X - x_{i-1})(X - x_{i+1}) \dots (X - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Les polynômes L_1, \dots, L_n sont appelés **polynômes de Lagrange** associés à la famille (x_1, \dots, x_n) .

- 2) a) Montrer que $\varphi(L_i) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - b) En déduire sans calculs que la famille (L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - c) Déterminer l'expression de $P = \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n)$ en fonction des polynômes L_i pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
- Ce polynôme P est donc l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- d) En utilisant ce qui précède, déterminer l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 5$ et $P(3) = -1$.