

Exercice : Compression d'un gaz parfait

1. On applique le second principe au gaz : $\Delta S = S_e + S_c$. La transformation est adiabatique ($S_e = 0$) et réversible ($S_c = 0$) donc elle est isentropique :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 0 \iff T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \iff T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 396 \text{ K}$$

Remarque : On retrouve, comme on pouvait s'y attendre, l'expression d'une loi de Laplace puisqu'elle s'applique pour un transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait.

2. Reprenons le second principe, qui s'écrit désormais : $S_c = \Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2' V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}}$.

La transformation est irréversible donc : $S_c > 0 \iff \frac{T_2' V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} > 1 \iff T_2' > T_2$.

3. On applique le premier principe au gaz : $\Delta U = W$.

La pression résultante extérieure exercée par l'atmosphère et la masse est constante : $P_{\text{ext}} = P_0 + \frac{mg}{S}$, avec m la masse posée et S la section du piston. Le travail des forces de pression vaut $W = - \int_{V_1}^{V_2} P_{\text{ext}} dV = -P_{\text{ext}}(V_2 - V_1)$.

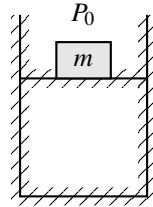
À l'état final le piston est en équilibre mécanique donc la pression du gaz vaut $P_2 = P_{\text{ext}}$. Ainsi $W = -P_2(V_2 - V_1) = nRT_2' \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)$.

On revient au 1er principe : $\frac{nR}{\gamma-1}(T_2' - T_1) = nRT_2' \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \iff 1 - \frac{T_1}{T_2'} = (\gamma-1) \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)$.

Après simplification on obtient : $T_2' = \frac{T_1}{\gamma - (\gamma-1) \frac{V_1}{V_2}} = 500 \text{ K}$.

On applique le second principe : $S_c = \Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2' V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}}$, avec $nR = \frac{P_0 V_1}{T_1}$ (dans l'état initial, sans masse m , la pression du gaz vaut P_0 par équilibre mécanique du piston).

On effectue l'application numérique : $S_c = \frac{P_0 V_1}{(\gamma-1) T_1} \ln \frac{T_2' V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 0,39 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.



Exercice : Compression d'un gaz parfait

1. On applique le second principe au gaz : $\Delta S = S_e + S_c$. La transformation est adiabatique ($S_e = 0$) et réversible ($S_c = 0$) donc elle est isentropique :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 0 \iff T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \iff T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 396 \text{ K}$$

Remarque : On retrouve, comme on pouvait s'y attendre, l'expression d'une loi de Laplace puisqu'elle s'applique pour un transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait.

2. Reprenons le second principe, qui s'écrit désormais : $\Delta S = S_c$. On exprime la température finale : $\frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2' V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = S_c \iff T_2' V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} e^{\frac{\gamma-1}{nR} S_c} \iff T_2' = T_2 e^{\frac{\gamma-1}{nR} S_c}$.

La transformation est irréversible donc $\frac{\gamma-1}{nR} S_c > 0$. On conclut que $T_2' > T_2$.

3. On applique le premier principe au gaz : $\Delta U = W$.

La pression résultante extérieure exercée par l'atmosphère et la masse est constante : $P_{\text{ext}} = P_0 + \frac{mg}{S}$, avec m la masse posée et S la section du piston. Le travail des forces de pression vaut $W = - \int_{V_1}^{V_2} P_{\text{ext}} dV = -P_{\text{ext}}(V_2 - V_1)$.

À l'état final le piston est en équilibre mécanique donc la pression du gaz vaut $P_2 = P_{\text{ext}}$. Ainsi $W = -P_2(V_2 - V_1) = nRT_2' \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)$.

On revient au 1er principe : $\frac{nR}{\gamma-1}(T_2' - T_1) = nRT_2' \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \iff 1 - \frac{T_1}{T_2'} = (\gamma-1) \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)$.

Après simplification on obtient : $T_2' = \frac{T_1}{\gamma - (\gamma-1) \frac{V_1}{V_2}} = 500 \text{ K}$.

On applique le second principe : $S_c = \Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_2' V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}}$, avec $nR = \frac{P_0 V_1}{T_1}$ (dans l'état initial, sans masse m , la pression du gaz vaut P_0 par équilibre mécanique du piston).

On effectue l'application numérique : $S_c = \frac{P_0 V_1}{(\gamma-1) T_1} \ln \frac{T_2' V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 0,39 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

