

Devoir n°29 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit E un K -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q + q \circ p = 0$.

- 1) Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
- 2) Montrer que $p + q$ est un projecteur.
- 3) Montrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.
- 4) Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$.

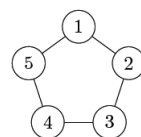
EXERCICE 2

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. On en tire trois au hasard.

- 1) Dans cette question, le tirage se fait sans remise.
 - a) Combien y a-t-il de tirages possibles si on tient compte de l'ordre? Si on n'en tient pas compte?
 - b) Quelle est la probabilité que les trois boules portent un numéro inférieur ou égal à 5?
 - c) Quelle est la probabilité que la somme des numéros des trois boules soit égale à 6?
- 2) Dans cette question, le tirage se fait avec remise.
 - a) Combien y a-t-il de tirages possibles (on tient compte de l'ordre)?
 - b) Quelle est la probabilité que les trois boules portent un numéro inférieur ou égal à 5?
 - c) Quelle est la probabilité que la somme des numéros des trois boules soit égale à 6?

EXERCICE 3

Deux personnes sont perdues dans un labyrinthe composé de cinq pièces disposées comme sur le dessin ci-contre. Chaque pièce est reliée aux deux pièces voisines par un couloir. Les couloirs sont représentés par les segments du dessin.



À l'instant $n = 0$, les deux personnes se trouvent respectivement dans les pièces 1 et 2. Elles se déplacent alors selon les règles suivantes :

- à partir d'une pièce, chacune peut aller dans l'une ou l'autre des pièces voisines, les deux possibilités étant de probabilité $1/2$;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- les choix des déplacements sont indépendants les uns des autres ;
- on suppose que les deux personnes ne peuvent ni se retrouver ni se voir dans les couloirs qui relient entre elles les différentes pièces ;
- les deux personnes se déplacent jusqu'à se retrouver dans une même pièce ; une fois qu'elles se sont retrouvées, elles restent ensemble lors de leurs déplacements futurs.

Pour tout entier naturel n , on note A_n l'événement "les deux personnes sont dans la même pièce après n déplacements", B_n l'événement "les deux personnes sont dans des pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2 ou 1 et 5) après n déplacements" et C_n l'événement "les deux personnes sont dans des pièces non voisines (par exemple les pièces 1 et 3 ou 1 et 4) après n déplacements". On note a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

- 1) Donner les valeurs de a_0 , b_0 et c_0 puis calculer a_1 , b_1 et c_1 .
- 2) Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n$, $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$ (un arbre n'est pas une justification suffisante, on utilisera un théorème (à préciser) dont on vérifiera les hypothèses).
- 3) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre deux $b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$.
- 4) En déduire l'expression de b_n en fonction de n .
- 5) Les suites $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles convergentes? Si oui, préciser leurs limites et en donner une interprétation. Les expressions de c_n et a_n en fonction de n ne sont pas demandées.