

Correction du DNS 26

EXERCICE 1

1) La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est continue sur $[0, 1]$ donc l'intégrale est bien définie.

2) Soient $x, y \in]0, +\infty[$ tels que $x \leq y$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$ on a $x+t \leq y+t$, donc $\frac{1}{x+t} \geq \frac{1}{y+t}$ et $\frac{e^t}{x+t} \geq \frac{e^t}{y+t}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a $\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt \geq \int_0^1 \frac{e^t}{y+t} dt$, soit $f(x) \geq f(y)$: la fonction f est décroissante.

3) a) Pour tout $t \in [0, 1]$ on a $e^t \leq e$ et $(x+t)(x_0+t) \geq xx_0 \geq \frac{x_0^2}{2}$ donc

$$\frac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{2e}{x_0^2}.$$

Or

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{e^t}{x_0+t} dt = \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t} \right) dt = \int_0^1 \frac{e^t(x_0-x)}{(x+t)(x_0+t)} dt$$

donc

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 \frac{e^t(x_0-x)}{(x+t)(x_0+t)} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{e^t|x_0-x|}{(x+t)(x_0+t)} dt \leq \int_0^1 \frac{2e|x_0-x|}{x_0^2} dt = \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}.$$

b) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2} = 0$, donc d'après la question précédente et le théorème des gendarmes,

$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ (si x tend vers x_0 on peut considérer que $x \geq \frac{x_0}{2}$), et donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$: la fonction f est continue en x_0 .

Comme elle est continue en tout point de $]0, +\infty[$, elle est continue sur $]0, +\infty[$.

4) a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on a $x \leq x+t \leq x+1$, donc $\frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{x+t} \leq \frac{e^t}{x}$, d'où par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+1} dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x} dt,$$

ce qui donne $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$.

b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e-1}{x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Le théorème des gendarmes pour les équivalents donne même

$$f(x) \sim \frac{e-1}{x}$$

au voisinage de $+\infty$.

5) a) La fonction exponentielle est dérivable sur $[0, 1]$ et la valeur absolue de sa dérivée est majorée par e sur cet intervalle donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a $|e^t - 1| \leq e|t - 0|$, soit $e^t - 1 \leq et$, pour tout $t \in [0, 1]$.

b) Soit $x > 0$. On a

$$|g(x)| = \left| \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^t - 1}{x+t} \right| dt = \int_0^1 \frac{|e^t - 1|}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{et}{x+t} dt$$

d'après ce qui précède. Or pour tout $t \in [0, 1]$ on a $x+t \geq t$ donc $\frac{et}{x+t} \leq \frac{et}{t} = e$ d'où

$$|g(x)| \leq \int_0^1 e dt = e.$$

La fonction g est bornée sur $]0, +\infty[$.

c) On voit que pour tout $x > 0$ on peut écrire

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = f(x) - [\ln(x+t)]_0^1 = f(x) - \ln(x+1) + \ln x.$$

Ainsi on a $f(x) = g(x) + \ln(x+1) - \ln x \sim -\ln x$ au voisinage de 0 puisque g est bornée et que $\ln(x+1)$ tend vers 0 alors que $-\ln x$ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

1) Posons $g(t) = \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ pour tout $t \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, l'intervalle $[x, 2x]$ (ou $[2x, x]$ si $x < 0$) ne contient pas 0, donc la fonction g est continue sur cet intervalle comme quotient de fonctions continues, et donc l'intégrale est bien définie. Par conséquent, la fonction f est définie sur \mathbb{R}^* .

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On effectue le changement de variables $u = -t$ dans $f(-x)$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\ln(1+(-u)^2)} = - \int_x^{2x} \frac{du}{\ln(1+u^2)} = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire.

3) a) La fonction g est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc elle y admet des primitives. Soit G une primitive de g sur ces deux intervalles. Alors pour tout $x \neq 0$ on peut écrire

$$f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x),$$

donc G est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}. \end{aligned}$$

b) Étudions le signe de $f'(x)$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{\ln(1+4x^2)} \geq \frac{1}{\ln(1+x^2)} \\ &\Leftrightarrow 2\ln(1+x^2) \geq \ln(1+4x^2) \\ &\Leftrightarrow \ln((1+x^2)^2) \geq \ln(1+4x^2) \\ &\Leftrightarrow (1+x^2)^2 \geq 1+4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 \geq 1+4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $] -\infty, -\sqrt{2}[$ et sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\sqrt{2}, 0[$ et sur $]0, \sqrt{2}[$.

4) a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$ on a $x^2 \leq t^2 \leq 4x^2$ donc

$$\frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

donc en intégrant entre x et $2x$ on obtient

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}.$$

b) Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\frac{x}{\ln(1+x^2)} \sim \frac{x}{\ln(x^2)} \sim \frac{x}{2\ln x}$$

et

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \sim \frac{x}{\ln(4x^2)} \sim \frac{x}{\ln 4 + 2\ln x} \sim \frac{x}{2\ln x}$$

donc par le théorème des gendarmes on a

$$f(x) \sim \frac{x}{2\ln x},$$

et par les croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

5) Posons $h(t) = \frac{1}{\ln(1+t^2)} - \frac{1}{t^2}$ pour tout $t \neq 0$. La fonction h est continue sur \mathbb{R}^* et

$$h(t) = \frac{t^2 - \ln(1+t^2)}{t^2 \ln(1+t^2)} \stackrel{0}{=} \frac{t^2 - (t^2 - t^4/2 + o(t^4))}{t^2 \ln(1+t^2)} \stackrel{0}{=} \frac{t^4 + o(t^4)}{2t^2 \ln(1+t^2)} \underset{0}{\sim} \frac{t^4}{2t^4} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$$

donc h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 1/2$.

Soit donc H une primitive de h sur \mathbb{R} . On a $h(x) \stackrel{0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$, donc $H(x) \stackrel{0}{=} \frac{x}{2} + o(x)$, d'où

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} h(t) dt &= H(2x) - H(x) \\ &\stackrel{0}{=} x + o(x) - \left(\frac{x}{2} + o(x) \right) \\ &\stackrel{0}{=} \frac{x}{2} + o(x). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} h(t) dt &= \int_x^{2x} \left(\frac{1}{\ln(1+t^2)} - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)} - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \\ &= f(x) + \left[\frac{1}{t} \right]_x^{2x} \\ &= f(x) - \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

donc finalement

$$f(x) \stackrel{0}{=} \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + o(x).$$