

Corrigé DM27

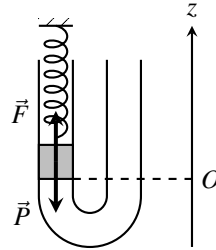
Exercice : Force de pression sur un bouchon

1. Système : bouchon.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, force de rappel $\vec{F} = k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u}_z$.

PFS sur \vec{u}_z : à l'équilibre : $0 = -mg + k(\ell_1 - \ell_0) \iff \ell_1 = \ell_0 + \frac{mg}{k}$.



2. Le liquide est au repos donc on peut appliquer la loi fondamentale de la statique des fluides : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. On intègre entre les points A et B :

$$\int_{P_A}^{P_B} dP = \int_{z_A}^{z_B} -\rho g dz \iff P - P_0 = \rho gh \iff P = P_0 + \rho gh$$

3. On reprend l'étude mécanique de la question 1, en tenant compte désormais des forces de pression qui s'exercent de la part et d'autre du bouchon. La nouvelle longueur du ressort est $\ell_2 = \ell_1 - z$.

Bilan des forces : poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, force de rappel $\vec{F} = k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}_z$, force pressante exercée par l'air atmosphérique : $\vec{F}_{P,1} = -P_0 S\vec{u}_z$, force pressante exercée par le liquide : $\vec{F}_{P,2} = PS\vec{u}_z$.

PFS sur \vec{u}_z : à l'équilibre : $0 = -mg + k(\ell_2 - \ell_0) + PS - P_0 S$.

On simplifie en utilisant les résultats des questions 1 et 2 : $0 = -kz + \rho ghS \iff h = \frac{k}{\rho g S} z$.

4. L'altitude de la surface libre en A vaut $z_A = z + h$. Après l'ajout du liquide, le bouchon s'est déplacé de δz et la surface libre en A s'est déplacée de $\delta z_A = \delta z + \delta h$. Ainsi le volume de liquide ajouté correspond à $\delta V = S\delta z + S\delta z_A = S(2\delta z + \delta h)$. En utilisant le résultat de la question précédente on conclut que :

$$\delta V = S(2\delta z + \beta \delta z) \iff \delta z = \frac{\delta V}{S(2+\beta)} \quad \text{et par suite} \quad \delta h = \frac{\beta \delta V}{S(2+\beta)}$$

5. Si la surface libre en A s'élève deux fois plus vite que le bouchon, cela signifie que pour une durée δt donnée on a :

$$\delta z_A = 2\delta z \iff \delta z + \delta h = 2\delta z \iff \delta h = \delta z \iff \beta = 1$$

On conclut que : $k = \rho g S = 3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Corrigé DM27

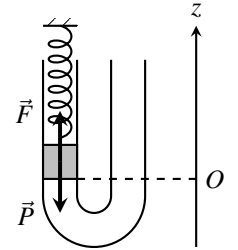
Exercice : Force de pression sur un bouchon

1. Système : bouchon.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, force de rappel $\vec{F} = k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u}_z$.

PFS sur \vec{u}_z : à l'équilibre : $0 = -mg + k(\ell_1 - \ell_0) \iff \ell_1 = \ell_0 + \frac{mg}{k}$.



2. Le liquide est au repos donc on peut appliquer la loi fondamentale de la statique des fluides : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. On intègre entre les points A et B :

$$\int_{P_A}^{P_B} dP = \int_{z_A}^{z_B} -\rho g dz \iff P - P_0 = \rho gh \iff P = P_0 + \rho gh$$

3. On reprend l'étude mécanique de la question 1, en tenant compte désormais des forces de pression qui s'exercent de la part et d'autre du bouchon. La nouvelle longueur du ressort est $\ell_2 = \ell_1 - z$.

Bilan des forces : poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, force de rappel $\vec{F} = k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}_z$, force pressante exercée par l'air atmosphérique : $\vec{F}_{P,1} = -P_0 S\vec{u}_z$, force pressante exercée par le liquide : $\vec{F}_{P,2} = PS\vec{u}_z$.

PFS sur \vec{u}_z : à l'équilibre : $0 = -mg + k(\ell_2 - \ell_0) + PS - P_0 S$.

On simplifie en utilisant les résultats des questions 1 et 2 : $0 = -kz + \rho ghS \iff h = \frac{k}{\rho g S} z$.

4. L'altitude de la surface libre en A vaut $z_A = z + h$. Après l'ajout du liquide, le bouchon s'est déplacé de δz et la surface libre en A s'est déplacée de $\delta z_A = \delta z + \delta h$. Ainsi le volume de liquide ajouté correspond à $\delta V = S\delta z + S\delta z_A = S(2\delta z + \delta h)$. En utilisant le résultat de la question précédente on conclut que :

$$\delta V = S(2\delta z + \beta \delta z) \iff \delta z = \frac{\delta V}{S(2+\beta)} \quad \text{et par suite} \quad \delta h = \frac{\beta \delta V}{S(2+\beta)}$$

5. Si la surface libre en A s'élève deux fois plus vite que le bouchon, cela signifie que pour une durée δt donnée on a :

$$\delta z_A = 2\delta z \iff \delta z + \delta h = 2\delta z \iff \delta h = \delta z \iff \beta = 1$$

On conclut que : $k = \rho g S = 3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

