

Correction du DNS 27

EXERCICE 1

1) Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2)) &= f(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) \\ &= (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2, \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) \\ &= \alpha_1(y_1, x_1) + \alpha_2(y_2, x_2) \\ &= \alpha_1f(x_1, y_1) + \alpha_2f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

(i) Déterminons le noyau de f . On a :

$$(x, y) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (y, x) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0),$$

donc $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$. L'application f est donc injective et, puisque c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, elle est bijective.

(ii) Soit (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 . On a $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = e_1$. La famille (e_2, e_1) est une base de \mathbb{R}^2 donc f est bijective car elle envoie une base sur une base.

(iii) On a immédiatement $f \circ f = \text{Id}$ donc f est bijective et $f^{-1} = f$.

2) Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha_1M_1 + \alpha_2M_2) &= f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 & \alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 \\ \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 & \alpha_1d_1 + \alpha_2d_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2 & \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 \\ \alpha_1d_1 + \alpha_2d_2 & \alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} c_1 & a_1 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} c_2 & a_2 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1f(M_1) + \alpha_2f(M_2) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

(i) Déterminons le noyau de f . Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$M \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow M = 0,$$

donc $\text{Ker } f = \{0\}$. L'application f est donc injective et, puisque c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, elle est bijective.

(ii) Soit $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $f(E_{11}) = E_{12}$, $f(E_{12}) = E_{22}$, $f(E_{21}) = E_{11}$ et $f(E_{22}) = E_{21}$. La famille $(E_{12}, E_{22}, E_{21}, E_{11})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc f est bijective car elle envoie une base sur une base.

(iii) Soit l'application $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$. Alors $f \circ g = \text{Id}$ et $g \circ f = \text{Id}$ donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

3) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)(X + 1) \\ &= \alpha P(X + 1) + \beta Q(X + 1) \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

(i) Déterminons le noyau de f . On a :

$$P \in \text{Ker } f \Leftrightarrow P(X + 1) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, P(x + 1) = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0) \Leftrightarrow P = 0$$

donc $\text{Ker } f = \{0\}$. L'application f est donc injective et, puisque c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, elle est bijective.

(ii) La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Son image par f est la famille $(1, X+1, \dots, (X+1)^n)$ qui est une famille échelonnée en degrés de polynômes non nuls donc elle est libre, et de cardinal $n+1$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc aussi une base de $\mathbb{R}_n[X]$. L'application f est bijective.

(iii) Soit l'application $g : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $g(P) = P(X-1)$. Alors $f \circ g = \text{Id}$ et $g \circ f = \text{Id}$ donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

4) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n), (b_0, b_1, \dots, b_n)$ deux éléments de \mathbb{R}^{n+1} . Alors

$$\begin{aligned} f(\alpha(a_0, a_1, \dots, a_n) + \beta(b_0, b_1, \dots, b_n)) &= f(\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \dots, \alpha a_n + \beta b_n) \\ &= (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)X + \dots + (\alpha a_n + \beta b_n)X^n \\ &= \alpha(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) + \beta(b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n) \\ &= \alpha f(a_0, a_1, \dots, a_n) + \beta f(b_0, b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

(i) Déterminons le noyau de f . On a :

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$$

car un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. Ainsi $\text{Ker } f = \{0\}$.

L'application f est donc injective et, puisque ses espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie $(n+1)$, elle est bijective.

(ii) Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . On a $f(e_1) = 1, f(e_2) = X, \dots, f(e_{n+1}) = X^n$. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc f est bijective car elle envoie une base sur une base.

(iii) Soit l'application $g : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $g(P) = (P(0), P'(0), P''(0)/2!, \dots, P^{(n)}(0)/n!)$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes $P(0), P'(0), P''(0)/2!, \dots, P^{(n)}(0)/n!$ sont les coefficients de P , donc $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ et donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

EXERCICE 2

1) a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= ((\alpha P + \beta Q)(x_1), \dots, (\alpha P + \beta Q)(x_n)) \\ &= (\alpha P(x_1) + \beta Q(x_1), \dots, \alpha P(x_n) + \beta Q(x_n)) \\ &= \alpha(P(x_1), \dots, P(x_n)) + \beta(Q(x_1), \dots, Q(x_n)) \\ &= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire.

b) Déterminons le noyau de φ . Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors :

$$P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \Leftrightarrow (P(x_1), \dots, P(x_n)) = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow P(x_1) = \dots = P(x_n) = 0,$$

ce qui revient à dire que x_1, \dots, x_n sont racines de P . Mais P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc s'il a n racines deux à deux distinctes, alors il est nul.

Ainsi $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, et donc φ est injective. De plus $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{R}^n$, donc φ est bijective.

2) a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$L_i(x_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } L_i(x_i) = 1,$$

donc $\varphi(L_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0) = e_i$.

b) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$ donc la famille (L_1, \dots, L_n) est l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base (e_1, \dots, e_n) . C'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Il suffit d'écrire

$$P = \varphi^{-1}(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = y_1 \varphi^{-1}(e_1) + \dots + y_n \varphi^{-1}(e_n) = y_1 L_1 + \dots + y_n L_n.$$

d) En prenant $x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ on a :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{2}X + 3, \\ L_2 &= \frac{(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)} = -X^2 + 4X - 3, \\ L_3 &= \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, le polynôme cherché est $P = 2L_1 + 5L_2 - L_3 = -\frac{9}{2}X^2 + \frac{33}{2}X - 10$.