Devoir n°30 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = x \operatorname{ch} x$ et $g(x) = x \operatorname{sh} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions ch, sh, f et g.

1) a) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels. Déterminer le développement limité de $\alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} + \gamma f + \delta g$ à l'ordre 3 en 0.

b) En déduire que la famille $\mathcal{B} = (\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, f, g)$ est une base de F.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in F$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $T_\lambda(h)(x) = xh''(x) - \lambda h'(x) - xh(x)$.

2) a) Calculer $T_\lambda(\operatorname{ch})$, $T_\lambda(\operatorname{sh})$, $T_\lambda(f)$ et $T_\lambda(g)$.

b) Montrer que T_λ définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

c) Calculer le déterminant de T_λ. Pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme T_λ est-il bijectif ?

d) Déterminer le rang de T_λ en fonction de λ.

e) Déterminer le noyau et l'image de T_0 puis de T_2.

EXERCICE 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A et Id l'application identité de $\mathbb{R}^4$.

1) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$.

2) Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire A^{4n}, A^{4n+1}, A^{4n+2} et A^{4n+3} pour tout entier naturel n.

3) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

4) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A^2.

a) Montrer que $g \circ g = \mathrm{Id}$. Quelle est la nature de g ?

b) Déterminer une base (u_1, u_2) de $\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id})$ et une base (v_1, v_2) de $\operatorname{Ker}(g + \mathrm{Id})$.

c) Montrer que la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^4$ et écrire les matrices de g puis de f dans cette base.

5) À tout couple (a, b) de réels, on associe la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$. Soit $F = \{M(a, b)\,;\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a, b)$ soit inversible.

b) Déterminer le rang de la matrice $M(a, b)$ en fonction de a et b.

c) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner une base.

d) F est-il stable par le produit matriciel ?

e) Développer $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$ et en déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ et de $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

f) Calculer $(M(a, b))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.