Corrigé DS8

Exercice 1 : Le dermographe

1. En coordonnées cylindriques le champ magnétique est de la forme $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{u}_z$ (voir cours pour la démo et l'allure des lignes de champ). Les lignes de champ sont parallèles entre elles donc le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est **uniforme**.

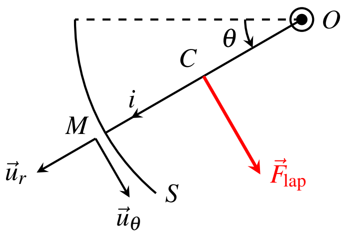
2. On conserve les hypothèses du modèle infini à condition que **la longueur** L **du solénoïde soit grande comparée à son rayon** r : on prend typiquement comme critère $L \gtrsim 10r$.

Dans ce cas, compte-tenu du sens du courant, le champ $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde vaut : $\boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} i \vec{u}_z}$.

À l'extérieur **le champ est nul**.

3. En norme le champ produit par l'électroaimant vaut : $B = \mu_r \times \mu_0 \frac{N}{L} i \iff \boxed{i = \frac{BL}{\mu_0 \mu_r N} = 1{,}0\,\mathrm{A}}$.

4. On trouve le sens du courant en regardant les bornes du générateur.



La tige est soumise à la **force de Laplace** : $\boxed{\vec{F} = i\overrightarrow{OM} \wedge \vec{B}}$.

5. La partie mobile est soumise à la force de Laplace $\vec{F}_{\text{lap}}$ qui s'applique au centre C de la tige, au couple de rappel Γ et à la réaction $\vec{R}$ exercée par le pivot qui s'applique en O.

6. On applique le théorème du moment cinétique à la tige, par rapport à l'axe de rotation (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) + \Gamma$$

avec $\mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0$ (bras de levier nul). On projette la force de Laplace résultante sur la tige dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$: $\vec{F}_{\text{lap}} = i\ell\vec{u}_r \wedge (-B\vec{u}_z) = iB\ell\vec{u}_\theta$.

On calcule le moment de cette force : $\mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{\ell}{2} \times iB\ell = \frac{1}{2} iB\ell^2$.
On détermine l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$:

$$J\ddot{\theta} = \frac{1}{2} iB\ell^2 - K\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = \frac{iB\ell^2}{2J}}$$

Par identification on trouve $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}}$ et $\boxed{A = \frac{iB\ell^2}{2J}}$.

7. Solution particulière : $\theta_p = \frac{A}{\omega_0^2}$.

Solution générale : $\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2}$.

Les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ conduisent à $C_2 = 0$ et $C_1 = -A/\omega_0{}^2$ d'où :

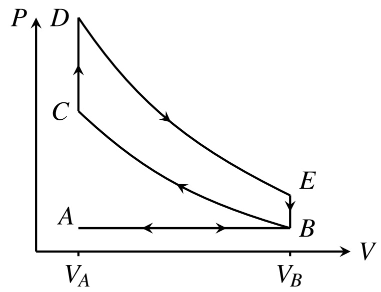
$$\boxed{\theta(t) = \frac{A}{\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t))}$$

8. La partie mobile quitte le conducteur à la date t_1 telle que $\theta(t) = \theta_S$. On trouve après calculs que :

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(1 - \frac{\omega_0^2}{A}\theta_S\right) = 14\,\mathrm{ms}}$$

Exercice 2 : Étude thermodynamique du moteur PSA EB2

1. Voir ci-contre.



2. $B \to C$ est adiabatique réversible donc on peut appliquer les lois de Laplace :

$$P_B V_B^\gamma = P_C V_A^\gamma \iff \boxed{P_C = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma P_B = 28{,}7\,\mathrm{bar}}$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_A^{\gamma-1} \iff \boxed{T_C = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} T_B = 783\,\mathrm{K}}$$

$C \to D$ est isochore donc : $\frac{P_C}{T_C} = \frac{P_D}{T_D} \iff \boxed{P_D = \frac{T_D}{T_C} P_C = 103\,\mathrm{bar}}$.

3. Premier principe pour $C \to D$ isochore : $\Delta_{C\to D} U = W_{C\to D} + Q_{C\to D}$.

On a $W_{C\to D} = 0$ (isochore) et $\Delta_{C\to D} U = C_V(T_D - T_C) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_D - T_C)$. On calcule nR avec la loi des gaz parfaits en B et on conclut :

$$\boxed{Q_{C\to D} = \frac{P_B V_B}{(\gamma-1) T_B}(T_D - T_C) = 747\,\mathrm{J}}$$

4. De la même manière : $\boxed{Q_{E\to B} = \frac{P_B V_B}{(\gamma-1) T_B}(T_B - T_E) = -327\,\mathrm{J}}$.

Le transfert utile est le travail fourni sur un cycle $-W_{\text{cycle}}$.
Le transfert coûteux est le transfert thermique $Q_{C\to D}$ libéré par la combustion de l'essence.

Le rendement du cycle est donc défini par : $r = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{C\to D}}$.
Premier principe sur un cycle :

$$\Delta_{\text{cycle}} U = 0 = W_{\text{cycle}} + Q_{C\to D} + Q_{D\to E} \iff -W_{\text{cycle}} = Q_{C\to D} + Q_{D\to E} = 420\,\mathrm{J}$$

On conclut que : $\boxed{r = \frac{420}{747} = 0{,}562}$.

5. Voir cours : $\boxed{r_{\max} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 0,894}$.

Le rendement maximal n'est pas atteint car le cycle de Beau de Rochas est **irréversible** (à cause des transformations $C \to D$ et $D \to E$).

6. Chaque tour de moteur dure $\dfrac{1}{5750} = 1,74 \cdot 10^{-4}\,\text{min} = 10,4\,\text{ms}$.

Comme le moteur effectue deux tours pendant la durée d'un cycle, on a $\boxed{\Delta t = 20,8\,\text{ms}}$.

7. Chaque cylindre fournit un travail $-W_{\text{cycle}} = 420\,\text{J}$ par cycle.

Il y a trois cylindres donc le travail total fourni par le moteur vaut : $W_{\text{fourni}} = 1260\,\text{J}$.

La puissance du moteur vaut : $\boxed{\mathscr{P} = \dfrac{W_{\text{fourni}}}{\Delta t} = 60,6\,\text{kW} = 82,4\,\text{ch}}$.

Les valeurs sont compatibles avec la puissance annoncée par le constructeur.

8. On calcule la durée d'un trajet de 100 km : $\Delta t_{100} = \dfrac{L}{v} = 2,77 \cdot 10^3\,\text{s}$.

On calcule la durée d'un cycle pour un régime de 3600 tr/min : $\Delta t_{\text{cycle}} = 2 \times \dfrac{60}{3600} = 33,3\,\text{ms}$.

On calcule le nombre de cycles effectué au cours de ce trajet : $N = \dfrac{\Delta t_{100}}{\Delta t_{\text{cycle}}} = 8,31 \cdot 10^4$.

Sur chaque cycle le transfert thermique libéré par la combustion de l'essence dans un cylindre vaut : $Q_{C\to D} = 747\,\text{J}$. Le transfert thermique total pour les trois cylindres et l'ensemble du trajet vaut : $Q_{\text{comb}} = 747 \times 3 \times 1,33 \cdot 10^5 = 1,86 \cdot 10^8\,\text{J}$.

La masse d'octane correspondante vérifie : $Q_{\text{comb}} = m_o q_{\text{comb}} \iff m_o = \dfrac{Q_{\text{comb}}}{q_{\text{comb}}} = 4,2\,\text{kg}$.

On en déduit le volume d'essence : $V_o = \dfrac{m_o}{\rho_o} = 5,8\,\text{L}$.

La consommation du véhicule est de $\boxed{5,8\,\text{L}/100\,\text{km}}$.

Exercice 3 : Élévation d'un ballon dans la troposphère

1. On calcule la masse molaire moyenne pondérée par les proportions de chaque gaz :

$$\begin{aligned} M &= 0,78 \times M(\text{N}_2) + 0,21 \times M(\text{O}_2) + 0,01 \times M(\text{Ar}) \\ &= 0,78 \times 28 + 0,21 \times 32 + 0,01 \times 40 \\ &= \boxed{29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}} \end{aligned}$$

2. Voir cours : $\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)}$.

On peut poser $P(z) = P_0 \mathrm{e}^{-z/H}$, avec l'altitude caractéristique : $\boxed{H = \dfrac{RT_0}{Mg} = 8,4\,\text{km}}$.

3. L'application numérique donne : $\boxed{P(z = 10\,\text{km}) = 0,305\,\text{bar}}$.

4. On applique la loi fondamentale : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\dfrac{Mg}{RT(z)}P \iff \dfrac{\mathrm{d}P}{P} = -\dfrac{Mg}{RT_0}\dfrac{\mathrm{d}z}{1-kz}$.

On intègre entre $z = 0$ et une altitude z quelconque :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1-kz} \iff \ln\frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{kRT_0}\ln(1-kz) \iff P(z) = P_0\,(1-kz)^{\alpha}, \text{ avec } \boxed{\alpha = \frac{Mg}{kRT_0}}$$

5. L'application numérique donne : $\boxed{P(z = 10\,\text{km}) = 0,261\,\text{bar}}$.

L'écart relatif entre les valeurs des deux modèle vaut : $\boxed{\dfrac{P_{\text{iso}} - P_{\text{poly}}}{P_{\text{iso}}} = \dfrac{0,305 - 0,261}{0,305} = 14\%}$.

6. L'hélium et l'air extérieur sont à la même pression P et même température T_0.

Les masses volumiques valent $\rho_{\text{He}} = \dfrac{PM_{\text{He}}}{RT_0}$ et $\rho_{\text{air}} = \dfrac{PM}{RT_0}$. Ainsi : $\boxed{d = \dfrac{\rho_{\text{He}}}{\rho_{\text{air}}} = \dfrac{M_{\text{He}}}{M} = 0,138}$.

Ce rapport est indépendant de la pression, donc de l'altitude du ballon.

7. Le poids du ballon (au sol) vaut : $\vec{P} = (m_{\text{solide}} + m_{\text{He}})\vec{g} = \left(m + \dfrac{P_0 M_{\text{He}} V_0}{RT_0}\right)\vec{g}$.

La poussée d'Archimède exercée par l'air vaut : $\vec{\Pi}_{\text{air}} = -m_{\text{air déplacé}}\vec{g} = -\dfrac{P_0 M V_0}{RT_0}\vec{g}$.

Ainsi la force ascensionnelle vaut :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A = \left(\frac{P_0(M - M_{\text{He}})V_0}{RT_0} - m\right) g\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{F} = (\mu_0 V_0(1-d) - m)\, g\vec{u}_z}$$

8. Le ballon s'élève à condition que la force ascensionnelle soit dirigée vers le ciel, c'est-à-dire :

$$\mu_0 V_0(1-d) - m > 0 \iff m < \mu_0 V_0(1-d)$$

L'application numérique donne : $\mu_0 V_0(1-d) = 522\,\text{kg}$. On a bien $m < 522\,\text{kg}$ donc **le ballon décolle**.

9. Par conservation de la quantité de matière et de la température de l'hélium au cours de cette phase :

$$P(z)V(z) = P_0 V_0 \iff \boxed{V(z) = \frac{P_0}{P(z)}V_0 = V_0 \mathrm{e}^{z/H}}$$

10. Le volume atteint sa valeur maximale pour : $V_{\max} = V_0 \mathrm{e}^{z_1/H} \iff \boxed{z_1 = H \ln\dfrac{V_{\max}}{V_0} = 5,8\,\text{km}}$.

11. Pendant la deuxième phase de l'ascension :

- Le poids du ballon vaut $\vec{P} = \left(m + \dfrac{P(z)M_{\text{He}}V_{\max}}{RT_0}\right)\vec{g}$.
- La poussée d'Archimède vaut $\vec{\Pi}_A = -\dfrac{P(z)MV_{\max}}{RT_0}\vec{g}$.

La force ascensionnelle vaut donc : $\vec{F} = \left(\dfrac{P(z)(M - M_{\text{He}})V_{\max}}{RT_0} - m\right) g\vec{u}_z$.

Pendant l'ascension $P(z)$ diminue et tous les autres termes sont constants donc la force verticale F_z diminue aussi. Si la pression diminue suffisamment alors la force ascensionnelle peut s'annuler, à condition que :

$$\frac{P(z)(M - M_{\text{He}})V_{\max}}{RT_0} = m \iff P(z) = \frac{mRT_0}{(M - M_{\text{He}})V_{\max}}$$

En remplaçant $P(z)$ par son expression on conclut finalement que le ballon plafonne à l'altitude :

$$\boxed{z_2 = H \ln\frac{P_0(M - M_{\text{He}})V_{\max}}{mRT_0} = 7,1\,\text{km}}$$