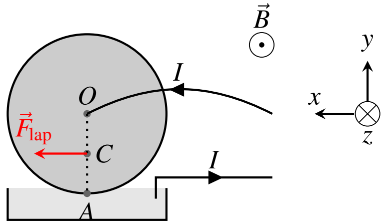
Corrigé DM28

Exercice : **Roue de Barlow**

1. La force de Laplace qui s'exerce sur le disque vaut :

$\vec{F}_{\text{lap}} = I\,\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B} = I(-R\vec{u}_y) \wedge (-B\vec{u}_z) \iff \boxed{\vec{F}_{\text{lap}} = IBR\,\vec{u}_x}$



On représente cette force sur la figure ci-contre.

2. Le bras de levier de la force de Laplace vaut $b(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{R}{2}$ et la règle de la main droite indique que le moment est positif : $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{1}{2}IBR^2}$.

3. On applique le théorème du moment cinétique au disque, par rapport à l'axe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le disque est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction du pivot $\vec{R}$, aux actions de Laplace et au couple de frottement.

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) + \Gamma$$

Le poids et la réaction du pivot s'appliquent en O donc leur moment est nul (bras de levier nul). On conclut :

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}IBR^2 - \alpha\omega \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{IBR^2}{2J}}$$

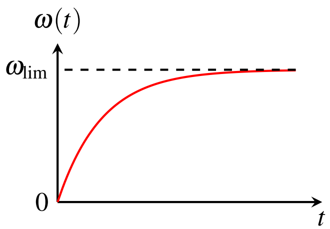
4. On résout l'équation précédente.

<ins>Solution particulière</ins> : $\omega_p = \dfrac{IBR^2}{2\alpha}$

<ins>Solution générale</ins> : $\omega(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{IBR^2}{2\alpha}$ avec $\tau = \dfrac{J}{\alpha}$

<ins>Condition initiale</ins> : $\omega(0) = 0 = A + \dfrac{IBR^2}{2\alpha} \iff A = -\dfrac{IBR^2}{2\alpha}$.

On conclut que : $\boxed{\omega(t) = \dfrac{IBR^2}{2\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.



La vitesse angulaire de rotation limite vaut $\boxed{\omega_{\text{lim}} = \dfrac{IBR^2}{2\alpha}}$.

5. On convertit la vitesse angulaire de rotation limite en unité SI : $\omega_{\text{lim}} = 1500\,\text{tours/min} = 157\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

L'intensité vaut : $\boxed{I = \dfrac{2\alpha\omega_{\text{lim}}}{BR^2} = 1{,}0\,\text{A}}$.

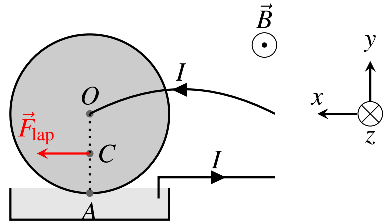
La durée de la phase d'accélération s'identifie à celle du régime transitoire : $\boxed{\Delta t \sim 5\tau = 10\,\text{s}}$.

Corrigé DM28

Exercice : **Roue de Barlow**

1. La force de Laplace qui s'exerce sur le disque vaut :

$\vec{F}_{\text{lap}} = I\,\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B} = I(-R\vec{u}_y) \wedge (-B\vec{u}_z) \iff \boxed{\vec{F}_{\text{lap}} = IBR\,\vec{u}_x}$



On représente cette force sur la figure ci-contre.

2. Le bras de levier de la force de Laplace vaut $b(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{R}{2}$ et la règle de la main droite indique que le moment est positif : $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{1}{2}IBR^2}$.

3. On applique le théorème du moment cinétique au disque, par rapport à l'axe (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le disque est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction du pivot $\vec{R}$, aux actions de Laplace et au couple de frottement.

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) + \Gamma$$

Le poids et la réaction du pivot s'appliquent en O donc leur moment est nul (bras de levier nul). On conclut :

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}IBR^2 - \alpha\omega \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{IBR^2}{2J}}$$

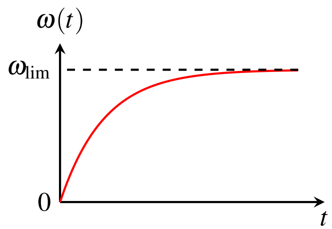
4. On résout l'équation précédente.

<ins>Solution particulière</ins> : $\omega_p = \dfrac{IBR^2}{2\alpha}$

<ins>Solution générale</ins> : $\omega(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{IBR^2}{2\alpha}$ avec $\tau = \dfrac{J}{\alpha}$

<ins>Condition initiale</ins> : $\omega(0) = 0 = A + \dfrac{IBR^2}{2\alpha} \iff A = -\dfrac{IBR^2}{2\alpha}$.

On conclut que : $\boxed{\omega(t) = \dfrac{IBR^2}{2\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.



La vitesse angulaire de rotation limite vaut $\boxed{\omega_{\text{lim}} = \dfrac{IBR^2}{2\alpha}}$.

5. On convertit la vitesse angulaire de rotation limite en unité SI : $\omega_{\text{lim}} = 1500\,\text{tours/min} = 157\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

L'intensité vaut : $\boxed{I = \dfrac{2\alpha\omega_{\text{lim}}}{BR^2} = 1{,}0\,\text{A}}$.

La durée de la phase d'accélération s'identifie à celle du régime transitoire : $\boxed{\Delta t \sim 5\tau = 10\,\text{s}}$.