Correction du DNS 29

EXERCICE 1

1) On a $p \circ q = -q \circ p$. En composant à gauche par p on obtient $p \circ p \circ q = -p \circ q \circ p$.

Or $p \circ p \circ q = p \circ q$ (car p est un projecteur) et $-p \circ q \circ p = q \circ p \circ p = q \circ p$, donc $p \circ q = q \circ p$.

On en déduit que $2p \circ q = 0$ donc que $p \circ q = 0$.

2) L'application $p + q$ est linéaire et $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$ donc $p + q$ est un projecteur.

3) On raisonne par double inclusion.

Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(p+q) \subset \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. Alors $(p+q)(x) = 0$, donc $p(x) = -q(x)$. En appliquant p on en déduit que $p^2(x) = -p \circ q(x)$, soit $p(x) = 0$, et en appliquant q on obtient $q \circ p(x) = -q^2(x)$, d'où $q(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. Alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$.

On conclut que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

4) On va montrer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$, puis que la somme est directe.

Montrons d'abord que $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Soit donc $y \in \mathrm{Im}(p+q)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = (p+q)(x)$. Alors $y = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

Montrons ensuite que $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}(p+q)$. Soit $y \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Il existe donc $y_1 \in \mathrm{Im}\, p$ et $y_2 \in \mathrm{Im}\, q$ tels que $y = y_1 + y_2$. Soit $x_1 \in E$ tel que $y_1 = p(x_1)$ et soit $x_2 \in E$ tel que $y_2 = q(x_2)$. Alors $p(y_1) = y_1$, $q(y_2) = y_2$, $q(y_1) = q \circ p(x_1) = 0$ et $p(y_2) = p \circ q(x_2) = 0$, donc $(p+q)(y) = p(y_1) + p(y_2) + q(y_1) + q(y_2) = y_1 + y_2 = y$ et donc $y \in \mathrm{Im}(p+q)$.

Montrons que $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q = \{0\}$. Soit $y \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. Alors $p(y) = y$ et $q(y) = y$, donc $p \circ q(y) = p(q(y)) = p(y) = y$, d'où $y = 0$.

On a donc bien montré que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

EXERCICE 2

1) a) Si on tient compte de l'ordre, il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles (10 possibilités pour la première boule, 9 pour la deuxième et 8 pour la troisième ; on peut aussi dire qu'un tirage est un 3-arrangement de l'ensemble des 10 boules).

Si on ne tient pas compte de l'ordre, il y a $\binom{10}{3} = 120$ tirages possibles (un tirage est une 3-combinaison de l'ensemble des 10 boules).

b) On peut raisonner en tenant compte de l'ordre ou pas. Si on tient compte de l'ordre, il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages dont les trois boules portent un numéro inférieur ou égal à 5, donc la probabilité de cet événement est $\dfrac{60}{720} = \dfrac{1}{12}$. Si on n'en tient pas compte, il y en a $\binom{5}{3} = 10$, et on retrouve que la probabilité cherchée est $\dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$.

c) La seule possibilité est que les boules tirées portent les numéros 1, 2 et 3. Si on tient compte de l'ordre il y a 6 tirages formés de ces trois boules, donc la probabilité cherchée est $\dfrac{6}{720} = \dfrac{1}{120}$. Si on n'en tient pas compte, il n'y en a qu'un, donc on retrouve que la probabilité cherchée est $\dfrac{1}{120}$.

2) a) Il y a $10^3 = 1000$ tirages possibles (un tirage est une 3-liste de l'ensemble des 10 boules).

b) Il y a $5^3 = 125$ tirages dont les trois boules portent un numéro inférieur ou égal à 5, donc la probabilité de cet événement est $\dfrac{125}{1000} = \dfrac{1}{8}$.

c) Les tirages possibles sont $(1,1,4)$, $(1,4,1)$, $(4,1,1)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$ et $(2,2,2)$. Il y en a 10, donc la probabilité cherchée est $\dfrac{10}{1000} = \dfrac{1}{100}$.

EXERCICE 3

1) Au départ les personnes sont dans deux pièces voisines, donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

Après le premier déplacement, elles restent dans des pièces voisines dans trois cas sur quatre et sinon elles sont dans des pièces non voisines, donc $a_1 = 0$, $b_1 = 3/4$ et $c_1 = 1/4$.

2) La famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \mid A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} \mid B_n)P(B_n) + P(A_{n+1} \mid C_n)P(C_n).$$

Or $P(A_{n+1} \mid A_n) = 1$ (si les personnes sont ensemble, elles le restent), $P(A_{n+1} \mid B_n) = 0$ (si elles sont dans des pièces voisines, elles ne peuvent pas se retrouver au déplacement suivant) et $P(A_{n+1} \mid C_n) = 1/4$ (si elles sont dans des pièces non voisines, elles ont une chance sur quatre de se retrouver au déplacement suivant), donc cette égalité devient

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n.$$

Les autres égalités s'obtiennent de manière analogue.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\
&= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\
&= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}c_n \\
&= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n\right) \\
&= \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n.
\end{aligned}$$

4) L'équation caractéristique associée à cette suite est

$$(e) \,:\, r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{5}{16}.$$

Le discriminant de (e) est $\Delta = \dfrac{5}{16}$ et ses racines sont

$$r_1 = \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}.$$

Il existe donc deux réels α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \alpha\left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}\right)^n + \beta\left(\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}\right)^n.$$

On a vu que $b_0 = 1$ et $b_1 = \dfrac{3}{4}$, donc

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\left(\dfrac{5}{8} - \dfrac{\sqrt{5}}{8}\right) + \beta\left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{\sqrt{5}}{8}\right) = \dfrac{3}{4} \end{cases},$$

qui donne après calculs $\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10}$ et $\beta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}$. Ainsi on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}\right)^n.$$

5) On a $-1 < \dfrac{5}{8} - \dfrac{\sqrt{5}}{8} < 1$ et $-1 < \dfrac{5}{8} + \dfrac{\sqrt{5}}{8} < 1$, donc b_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Avec l'égalité $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$, on en déduit que c_n tend vers 0 également, et puisque $a_n + b_n + c_n = 1$, a_n tend vers 1.

Cela traduit le fait que les personnes vont presque sûrement finir par se retrouver.