Devoir n°32 (non surveillé)

Dans ce problème, b, r et c désignent trois entiers naturels non nuls.

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On procède à des tirages successifs dans cette urne de la manière suivante :

- si la boule tirée est blanche, on la replace dans l'urne avec en plus c boules blanches,
- si la boule tirée est rouge, on la replace dans l'urne avec en plus c boules rouges.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule sortie au n^{e} tirage est blanche, à 0 si la boule sortie au n^{e} tirage est rouge.

1) Déterminer la loi de probabilité de X_1 et la reconnaître.

2) a) Justifier que les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 1)$ forment un système complet d'événements.

b) Sachant que la boule tirée lors du premier tirage est blanche :
- Quel est le contenu de l'urne avant le deuxième tirage ?
- Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche ? Qu'elle soit rouge ?

c) Sachant que la boule tirée lors du premier tirage est rouge :
- Quel est le contenu de l'urne avant le deuxième tirage ?
- Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche ? Qu'elle soit rouge ?

d) Déterminer la loi de probabilité de X_2 et la reconnaître.

3) a) Déterminer la loi de probabilité du couple (X_1, X_2). Les résultats seront présentés sous forme d'un tableau.

b) Justifier que les événements $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$, $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)$, $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)$ et $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ forment un système complet d'événements.

c) Sachant que la boule tirée lors du premier tirage est rouge et que la boule tirée lors du deuxième tirage est blanche :
- Quel est le contenu de l'urne avant le troisième tirage ?
- Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche ? Qu'elle soit rouge ?

d) Montrer que la variable X_3 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$. Que peut-on conjecturer ?

4) On va maintenant déterminer la loi de probabilité de X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(i) Que représente la variable aléatoire S_n ?

(ii) Quel est l'ensemble des valeurs prises par S_n ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Quel est le nombre de boules dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage ?

(ii) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Calculer $P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1)$.

(iii) Justifier l'égalité $P(X_{n+1} = 1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1)P(S_n = k)$.

(iv) Quelle est la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)$? Reconnaître $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k)$.

(v) Montrer que $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{b + cE(S_n)}{b + r + nc}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

(i) Calculer l'espérance de S_n.

(ii) En déduire que $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{b}{b+r}$.

(iii) Quelle est la loi suivie par X_{n+1} ?

d) Quel raisonnement mathématique permet de conclure sur la loi suivie par les variables X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$? Préciser les numéros des questions qui étayent ce raisonnement.