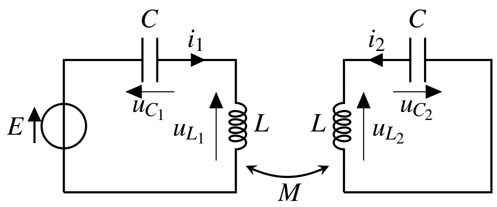
Corrigé DM29

Exercice : **Couplage entre deux circuits** LC



1. On applique la loi des mailles dans les deux circuits :

$$E = u_{C_1} + u_{L_1} \quad \text{et} \quad 0 = u_{C_2} + u_{L_2}$$

On dérive ces équations par rapport au temps pour exploiter les lois des condensateurs :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_{L_1}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i_1}{C} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + M\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 = \dfrac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_{L_2}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i_2}{C} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + M\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + MC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + i_1 = 0} \quad (1) \\ \boxed{LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + MC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + i_2 = 0} \quad (2) \end{cases}$$

2. On peut faire apparaître les variables S et D en écrivant les équations $(1)+(2)$ et $(1)-(2)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} + \frac{S}{(L+M)C} = 0}\ (1)+(2) \qquad ; \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{(L-M)C} = 0}\ (1)-(2)$$

Ces deux équations montrent que $S(t)$ et $D(t)$ effectuent des oscillations harmoniques de pulsations propres $\boxed{\omega_s = \dfrac{1}{\sqrt{(L+M)C}}}$ et $\boxed{\omega_a = \dfrac{1}{\sqrt{(L-M)C}}}$.

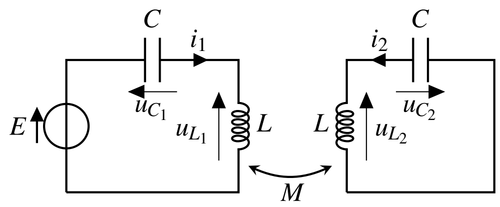
3. On cherche une approximation de ω_s au premier ordre :

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{\sqrt{1+M/L}} = \omega_0 \left(1 + \frac{M}{L}\right)^{-1/2} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{M}{2L}\right)$$

De le même manière on trouve $\omega_a \simeq \omega_0 \left(1 + \dfrac{M}{2L}\right)$. On conclut : $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{M}{L}\omega_0 = k\omega_0}$.

Corrigé DM29

Exercice : **Couplage entre deux circuits** LC



1. On applique la loi des mailles dans les deux circuits :

$$E = u_{C_1} + u_{L_1} \quad \text{et} \quad 0 = u_{C_2} + u_{L_2}$$

On dérive ces équations par rapport au temps pour exploiter les lois des condensateurs :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_{L_1}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i_1}{C} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + M\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 = \dfrac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_{L_2}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i_2}{C} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + M\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + MC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + i_1 = 0} \quad (1) \\ \boxed{LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + MC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + i_2 = 0} \quad (2) \end{cases}$$

2. On peut faire apparaître les variables S et D en écrivant les équations $(1)+(2)$ et $(1)-(2)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} + \frac{S}{(L+M)C} = 0}\ (1)+(2) \qquad ; \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{(L-M)C} = 0}\ (1)-(2)$$

Ces deux équations montrent que $S(t)$ et $D(t)$ effectuent des oscillations harmoniques de pulsations propres $\boxed{\omega_s = \dfrac{1}{\sqrt{(L+M)C}}}$ et $\boxed{\omega_a = \dfrac{1}{\sqrt{(L-M)C}}}$.

3. On cherche une approximation de ω_s au premier ordre :

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{\sqrt{1+M/L}} = \omega_0 \left(1 + \frac{M}{L}\right)^{-1/2} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{M}{2L}\right)$$

De le même manière on trouve $\omega_a \simeq \omega_0 \left(1 + \dfrac{M}{2L}\right)$. On conclut : $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{M}{L}\omega_0 = k\omega_0}$.