Corrigé DS6

Exercice 1 : Comète dans le système solaire

1. On applique le principe fondamental de la dynamique à la Terre dans le référentiel héliocentrique : $-M_T\dfrac{v_0^2}{a_0}\vec{u}_r = -\dfrac{GM_TM_S}{a_0^2}\vec{u}_r \iff \boxed{a_0 = \dfrac{GM_S}{v_0^2} = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\text{m}}$.

2. On exprime l'énergie mécanique de la comète en utilisant les données à l'instant initial et le résultat de la question 1 : $E = \dfrac{1}{2}m(2v_0)^2 - \dfrac{GmM_S}{a_0/2} = 0$.

La trajectoire de la comète est **parabolique** ; elle finit par s'éloigner du soleil à l'infini donc elle se trouve **dans un état diffus**.

3. La comète est soumise à la force gravitationnelle du Soleil : $\vec{F}_{S\to P} = -\dfrac{GmM_S}{r^2}\vec{u}_r$. On applique le théorème du moment cinétique par rapport au point O, dans le référentiel héliocentrique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(P)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OP}\wedge\vec{F}_{S\to P} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{OP}\parallel\vec{F}_{S\to P}$$

Le moment cinétique de la comète se conserve, or $\vec{L}_O(P) = \overrightarrow{OP}\wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ donc on peut conclure que $C = r^2\dot{\theta} = \text{Cste}$. On l'exprime en se plaçant à l'instant initial : $r(0) = \dfrac{a_0}{2}$ et $\dot{\theta}(0) = \dfrac{2v_0}{a_0}$ (à l'instant initial le vecteur $\vec{u}_y$ est confondu avec $\vec{u}_\theta$) donc $\boxed{C = a_0v_0}$.

4. On applique le principe fondamental de la dynamique : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{GmM_S}{r^2}\vec{u}_r$.

Or, d'après les questions 1 et 3, $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{\dot{\theta}}{C} = \dfrac{\dot{\theta}}{a_0v_0}$ et $GM_S = a_0v_0^2$, donc le PFD peut s'écrire sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -v_0\dot{\theta}\vec{u}_r$. On reconnaît par ailleurs que $-\dot{\theta}\vec{u}_r = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}$. On écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0\vec{u}_\theta) \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}-v_0\vec{u}_\theta) = \vec{0} \iff \boxed{\vec{v}-v_0\vec{u}_\theta = \overrightarrow{\text{Cste}}}$$

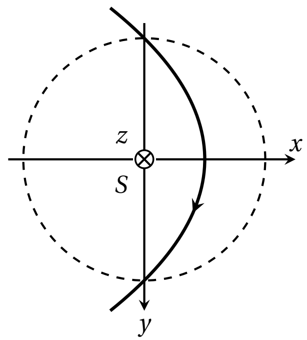
On calcule l'expression de ce vecteur en se plaçant à l'instant initial. On a vu que le vecteur $\vec{u}_\theta$ s'identifie alors à $\vec{u}_y$ donc : $\vec{v}-v_0\vec{u}_\theta = 2v_0\vec{u}_y - v_0\vec{u}_y = v_0\vec{u}_y \iff \boxed{\vec{v} = v_0(\vec{u}_\theta+\vec{u}_y)}$.

5. Le produit scalaire peut s'exprimer de deux manières différentes. On utilise d'abord le résultat de la question précédente : $\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta = v_0(1+\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_y) = v_0(1+\cos\theta)$.

On peut également l'exprimer de la manière suivante : $\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta = r\dot{\theta} = \dfrac{C}{r} = \dfrac{a_0v_0}{r}$.

On conclut que $\dfrac{a_0v_0}{r} = v_0(1+\cos\theta) \iff \boxed{r(\theta) = \dfrac{a_0}{1+\cos\theta}}$.

6. La comète croise l'orbite terrestre lorsque $r(\theta) = a_0$. D'après le résultat de la question précédente cela correspond à $\cos\theta(t_0) = 0 \implies \boxed{\theta(t_0) = \pi/2}$. On trace ci-contre l'allure de la trajectoire de la comète.



7. On a vu à la question 3 que la vitesse de la comète vérifie à tout instant : $\vec{v} = v_0(\vec{u}_\theta+\vec{u}_y)$. Or à l'instant t_0 le vecteur $\vec{u}_\theta$ de la comète s'identifie à $-\vec{u}_x$. Le vecteur vitesse de la terre à l'instant t_0 est $\vec{v}_{\text{Terre}} = -v_0\vec{u}_x$. On conclut que :

$\boxed{\|\vec{v}-\vec{v}_{\text{Terre}}\| = \|v_0(\vec{u}_y-\vec{u}_x)+v_0\vec{u}_x\| = v_0 = 30\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Exercice 2 : Équilibrage et dynamique d'une machine tournante

1. La machine est soumise à deux forces, son poids et la réaction de l'axe (Ox). On applique le TMC à la machine à l'équilibre par rapport à l'axe (Ox):

$$0 = \mathcal{M}_x(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{M}_x(\vec{R})}_{=0}$$

car le bras de levier de $\vec{R}$ est nul. À l'équilibre, le moment du poids doit être nul. Cela n'est possible que si le bras de levier du poids est nul, c'est-à-dire si $\vec{P}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OG}$, autrement dit si G se trouve à la verticale de O, au-dessus (position d'équilibre instable) ou en-dessous (position d'équilibre stable). En pratique, la seule position réellement observée est la deuxième.

2. La machine est soumise à $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

3. D'après le TMC : $J_x\ddot{\theta} = \mathcal{M}_x(\vec{P}) = -mga\sin\theta$. Dans l'approximation des petites angles, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2ga}{R^2}\theta = 0}$$

La machine oscille autour de la verticale avec une période $\boxed{T = 2\pi\dfrac{R}{\sqrt{2ga}}}$.

4. AN : $\boxed{a = \dfrac{4\pi^2R^2}{2gT^2} = 0{,}1\,\text{mm}}$.

5. On applique le PFD à la machine en mouvement : $m\vec{a} = \vec{R}+m\vec{g} \iff \vec{R} = m\vec{a}-m\vec{g}$. Puiqsue la machine tourne à vitesse constante, le point G possède un movement circulaire uniforme de rayon a. Son accélération vaut $\vec{a} = -a\omega^2\vec{u}_r = -\omega^2\overrightarrow{OG}$.

On retrouve bien l'expression $\boxed{\vec{R} = -m\omega^2\overrightarrow{OG}-m\vec{g}}$.

6. R est maximale lorsque $\overrightarrow{OG}$ est colinéaire à $\vec{g}$ et de même sens et $R_{\max} = m(a\omega^2+g)$. À l'inverse, R est minimale si $\overrightarrow{OG}$ est colinéaire à $\vec{g}$ et de sens opposé et $R_{\min} = m(a\omega^2-g)$. Au cours du temps, la valeur moyenne de R sera $\boxed{\langle R\rangle = ma\omega^2}$.

7. AN : $\boxed{\langle R\rangle = 2{,}0.10^3\,\text{N}}$. D'après la troisième loi de Newton, la machine exerce sur l'axe la force $-\vec{R}$. Le déséquilibre de la machine entraîne des efforts considérables sur l'axe et d'autant plus que cette réaction n'est pas constante mais change à chaque instant de direction. Même un déséquilibre très faible peut provoquer des dégats importants sur l'axe si la machine tourne à des vitesses de rotation élevées. En pratique, on rééquilibre la machine avant de la mettre en rotation.

8. On utilise la formule donnée dans l'énoncé. Si le centre d'inertie du système {machine + balourd} est confondu avec O alors :

$$m\overrightarrow{OG}+m'\overrightarrow{OB} = \vec{0} \iff m'\overrightarrow{OB} = -m\overrightarrow{OG}$$

où $\overrightarrow{OB}$ est la position du balourd. La seule possibilité consiste à placer le balourd diamétralement opposé au point G. Dans ce cas, on aura $m'R = ma \iff \boxed{m' = \dfrac{ma}{R} = 40\,\text{g}}$.

9. Pour que la machine entre en rotation, il faut que l'effort fourni par le moteur surpasse le couple résistant : $\boxed{|\Gamma_m| > |\Gamma_r|}$.

10. On applique le TMC à la machine : $J_x \dfrac{d\omega}{dt} = \Gamma_m + \Gamma_r + \Gamma_f = \Gamma_m + \Gamma_r - \alpha\omega$

Remarque : le moment du poids est désormais nul puisque la machine est équilibrée. On obtient l'équation :

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} + \frac{\alpha}{J_x}\omega = \frac{\Gamma_m+\Gamma_r}{J_x}}$$

Cette équation différentielle est caractéristique d'un régime transitoire de temps caractéristique $\boxed{\tau = \dfrac{J_x}{\alpha}}$. Lorsque $t \to \infty$, ω tend vers $\boxed{\omega_\infty = \dfrac{\Gamma_m+\Gamma_r}{\alpha}}$.

11. La solution générale de l'équation s'écrit : $\omega(t) = A\exp(-t/\tau) + \omega_\infty$. Avec la CI $\omega(0) = 0$, on trouve $A = -\omega_\infty$ d'où

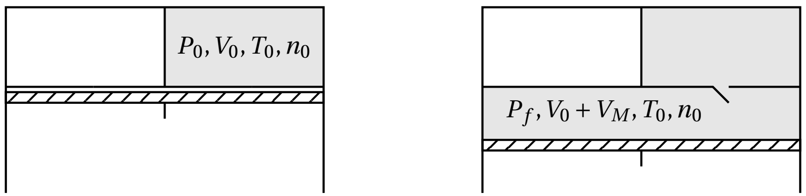
$$\boxed{\omega(t) = \omega_\infty\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)}$$

La vitesse angulaire tend vers l'asymptote $\omega = \omega_\infty$ de manière exponentielle.

12. La puissance délivrée par le moteur vaut $\boxed{\mathscr{P}_m = \Gamma_m\omega = 22\,\mathrm{kW}}$. En régime permanent, la puissance délivrée par le moteur est entièrement dissipée par les frottements : $\boxed{\mathscr{P}_f = -\mathscr{P}_m = -22\,\mathrm{kW}}$.

13. Un couple est homogène à un moment de force, c'est-à-dire au produit d'une distance et d'une force. Par conséquent : $\boxed{\text{son unité SI est le N}\cdot\text{m}}$.

Exercice 3 : Fonctionnement d'un compresseur



1. On tire le piston : L'air circule de l'enceinte A vers le réservoir. Le clapet B est fermé. On choisit comme système l'air initialement contenu dans A. Dans l'état final il occupe le volume $V_0 + V_M$.
État initial : $P_0V_0 = n_0RT_0$.
État final : $P_f(V_0 + V_M) = n_0RT_0$.
La pression finale vaut : $P_f = \dfrac{V_0}{V_0+V_M}P_0$.
La quantité d'air à l'intérieur du réservoir vaut $n_R = \dfrac{P_fV_M}{RT_0} = \dfrac{V_MV_0}{V_0+V_M}\dfrac{P_0}{RT_0}$.
On pousse le piston : Tout l'air du réservoir est refoulé dans l'enceinte B. Par conséquent la quantité d'air échangée entre A et B vaut $\boxed{n_R = \dfrac{V_MV_0}{V_0+V_M}\dfrac{P_0}{RT_0}}$.
Le clapet A est fermé pendant que l'on pousse le piston donc la pression dans l'enceinte A reste égale à P_f : $\boxed{P_{A,1} = \dfrac{V_0}{V_0+V_M}P_0}$.

Dans l'état final la quantité de matière dans l'enceinte B vaut $n_0 + n_R$. On en déduit la pression finale :

$$P_{B,1} = \frac{(n_0+n_R)RT_0}{V_0} = P_0 + \frac{V_M}{V_0+V_M}P_0 \iff \boxed{P_{B,1} = \left(1 + \frac{V_M}{V_0+V_M}\right)P_0}$$

2. On suppose qu'on a effectué N aller-retours avec le piston. Dans A la pression vaut $P_{A,N}$ et la quantité d'air $n_{A,N} = \dfrac{P_{A,N}V_0}{RT_0}$. Le volume du réservoir est nul. On reprend le raisonnement précédent : quand on tire le piston l'air initialement dans A se détend pour occuper finalement le volume $V_0 + V_M$. La quantité de matière et la température se conservent donc :

$$P_{A,N}V_0 = P_{A,N+1}(V_0 + V_M) \iff \boxed{P_{A,N+1} = \frac{V_0}{V_0+V_M}P_{A,N}}$$

On a affaire à une suite géométrique, de premier terme P_0 et de raison $\dfrac{V_0}{V_0+V_M} < 1$. Elle tend vers zéro et son terme général est : $\boxed{P_{A,N} = \left(\dfrac{V_0}{V_0+V_M}\right)^N P_0}$.

Pour déterminer $P_{B,N}$ on note que la quantité d'air totale dans le système se conserve. Dans l'état initial $n_{A,0} + n_{B,0} = \dfrac{2P_0V_0}{RT_0}$ donc on peut écrire, après N aller-retours :

$$n_{A,N} + n_{B,N} = \frac{2P_0V_0}{RT_0} \iff P_{A,N} + P_{B,N} = 2P_0 \iff \boxed{P_{B,N} = 2P_0 - \left(\frac{V_0}{V_0+V_M}\right)^N P_0}$$

Les pressions limites sont $\boxed{P_{A,\infty} = 0}$ et $\boxed{P_{B,\infty} = 2P_0}$. C'est logique : le compresseur fonctionne en extrayant tout l'air contenu dans A pour l'injecter dans B.

3. À cause du volume nuisible il reste de l'air dans le réservoir après que l'on a repoussé le piston. Or, pour que de l'air soit extrait de A il faut que le clapet A s'ouvre donc que la pression dans le réservoir soit plus faible que dans A.

• On ne peut plus extraire d'air de A à partir du moment où la pression dans le réservoir reste supérieure à celle dans A, même en tirant le piston au maximum. Dans le cas limite on a $P_R = P_A$ lorsque $V_R = V_M$. Cela signifie que la quantité d'air dans le réservoir vaut $n_R = \dfrac{P_AV_M}{RT_0}$.

Le volume nuisible crée un autre problème : la pression dans le réservoir est limitée car on ne peut pas réduire son volume à zéro. Or, pour que l'air du réservoir soit refoulé dans B il faut que le clapet B s'ouvre donc que la pression dans le réservoir soit supérieure à celle dans B.

• On ne peut plus refouler d'air dans B à partir du moment où la pression dans le réservoir reste inférieure à celle dans B, même en repoussant le piston au maximum. Dans le cas limite on a $P_R = P_B$ lorsque $V_R = V_m$. Cela signifie que la quantité d'air dans le réservoir vaut $n_R = \dfrac{P_BV_m}{RT_0}$.

L'état final du système, dans lequel plus aucun transfert d'air n'est possible, est tel que les pressions limites dans les deux enceintes vérifient : $n_R = \dfrac{P_AV_M}{RT_0} = \dfrac{P_BV_m}{RT_0}$. Or, la conservation de la quantité d'air nous dit que : $n_R + n_A + n_B = 2n_0 \iff n_R + \dfrac{P_AV_0}{RT_0} + \dfrac{P_BV_0}{RT_0} = 2n_0$. On obtient un système dont la résolution conduit à :

$$n_R = \frac{2n_0}{1+\frac{V_0}{V_M}+\frac{V_0}{V_m}} \quad , \quad P_A = \frac{\frac{2V_0}{V_M}}{1+\frac{V_0}{V_M}+\frac{V_0}{V_m}}P_0 \quad \text{et} \quad \boxed{P_B = \frac{\frac{2V_0}{V_m}}{1+\frac{V_0}{V_M}+\frac{V_0}{V_m}}P_0}$$