

Correction du DNS 30

EXERCICE 1

1) a) Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x + \gamma x \operatorname{ch} x + \delta x \operatorname{sh} x &= \alpha \left(1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right) + \beta \left(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) + \gamma x \left(1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \right) + \delta x (x + o(x^2)) \\ &= \alpha \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) + \beta \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + \gamma \left(x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) + \delta (x^2 + o(x^3)) \\ &= \alpha + (\beta + \gamma)x + \left(\frac{\alpha}{2} + \delta \right) x^2 + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} \right) x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

b) Supposons qu'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $\alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} + \gamma f + \delta g = 0$. Alors au voisinage de 0 on a :

$$\alpha + (\beta + \gamma)x + \left(\frac{\alpha}{2} + \delta \right) x^2 + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} \right) x^3 + o(x^3) = 0$$

d'après la question précédente. Par unicité du développement limité en 0 de la fonction nulle, on a donc :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \frac{\alpha}{2} + \delta = 0 \\ \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} = 0 \end{cases},$$

d'où on déduit facilement que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. La famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, f, g)$ est donc libre.

Or, par définition, c'est une famille génératrice de F , donc c'est une base de F .

2) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $T_\lambda(\operatorname{ch})(x) = x \operatorname{ch} x - \lambda \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x = -\lambda \operatorname{sh} x$, donc $T_\lambda(\operatorname{ch}) = -\lambda \operatorname{sh}$.

De même, on trouve que $T_\lambda(\operatorname{sh}) = -\lambda \operatorname{ch}$, $T_\lambda(f) = -\lambda \operatorname{ch} + (2 - \lambda)g$ et $T_\lambda(g) = -\lambda \operatorname{sh} + (2 - \lambda)f$.

b) Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $h_1, h_2 \in F$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)(x) &= x(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)''(x) - \lambda(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)'(x) - x(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)(x) \\ &= \alpha_1(xh_1''(x) - \lambda h_1'(x) - xh_1(x)) + \alpha_2(xh_2''(x) - \lambda h_2'(x) - xh_2(x)) \\ &= \alpha_1 T_\lambda(h_1)(x) + \alpha_2 T_\lambda(h_2)(x) \\ &= (\alpha_1 T_\lambda(h_1) + \alpha_2 T_\lambda(h_2))(x), \end{aligned}$$

donc $T_\lambda(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 T_\lambda(h_1) + \alpha_2 T_\lambda(h_2)$: T_λ est linéaire.

De plus, d'après la question précédente, $T_\lambda(\operatorname{ch}), T_\lambda(\operatorname{sh}), T_\lambda(f)$ et $T_\lambda(g)$ appartiennent à F , donc si $h = \alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} + \gamma f + \delta g \in F$ alors $T_\lambda(h) \in F$ aussi.

L'application T_λ est donc un endomorphisme de F , et, d'après le a), sa matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

c) En développant (par exemple) par rapport à la première colonne, puis par rapport à la deuxième ligne, on obtient facilement

$$\det T_\lambda = \lambda^2(2 - \lambda)^2.$$

L'endomorphisme T_λ est bijectif si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \notin \{0, 2\}$.

d) En intervertissant les deux premières et les deux dernières lignes de la matrice, on obtient une matrice échelonnée par lignes. Son rang (nombre de pivots), qui est aussi le rang de T_λ , est 2 si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$ et 4 sinon.

e) Le rang de T_0 est égal à 2, donc son image est de dimension 2, et l'espace F est de dimension 4 donc son noyau est de dimension 2 également d'après le théorème du rang. La famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, f, g)$ est une base de F , donc la famille $(T_0(\operatorname{ch}), T_0(\operatorname{sh}), T_0(f), T_0(g)) = (0, 0, 2g, 2f)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} T_0$, et (f, g) en est une base (on peut aussi regarder les colonnes de la matrice). Enfin, on a $T_0(\operatorname{ch}) = T_0(\operatorname{sh}) = 0$, et la famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre, donc c'est une base de $\operatorname{Ker} T_0$.

Le rang de T_2 est égal à 2, donc son image est de dimension 2, et son noyau également d'après le théorème du rang. La famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, f, g)$ est une base de F , donc la famille $(T_2(\operatorname{ch}), T_2(\operatorname{sh}), T_2(f), T_2(g)) = (-2 \operatorname{sh}, -2 \operatorname{ch}, -2 \operatorname{ch}, -2 \operatorname{sh})$

est une famille génératrice de $\text{Im } T_2$, et (ch, sh) en est une base (on peut aussi regarder les colonnes de la matrice). Enfin, on voit que $T_2(\text{ch} - g) = T_2(\text{sh} - f) = 0$, et la famille $(\text{ch} - g, \text{sh} - f)$ est libre, donc c'est une base de $\text{Ker } T_2$.

EXERCICE 2

1) La matrice A est de rang 4, donc elle est inversible et l'endomorphisme f est bijectif : c'est un automorphisme de \mathbb{R}^4 . On peut aussi dire que $\det A = -1 \neq 0$.

2) On trouve :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; A^4 = I.$$

Par conséquent $A^{4n} = I^n = I$, $A^{4n+1} = A^{4n}A = A$, $A^{4n+2} = A^{4n}A^2 = A^2$ et, $A^{4n+3} = A^{4n}A^3 = A^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On a $A \times A^3 = I$, donc A est inversible et $A^{-1} = A^3$.

4) a) On a $A^2 \times A^2 = I$, donc $g \circ g = \text{Id}$. Ainsi g est une symétrie.

b) La matrice de $g - \text{Id}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et celle de $g + \text{Id}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On voit ainsi que $\text{Ker}(g - \text{Id}) = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, et que $\text{Ker}(g + \text{Id}) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, -1)$.

c) g est une symétrie donc $\text{Ker}(g - \text{Id})$ et $\text{Ker}(g + \text{Id})$ sont supplémentaires. D'après un théorème, on en déduit que la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^4 .

Puisque $u_1, u_2 \in \text{Ker}(g - \text{Id})$, on a $g(u_1) = u_1$ et $g(u_2) = u_2$, et puisque $v_1, v_2 \in \text{Ker}(g + \text{Id})$, on a $g(v_1) = -v_1$ et $g(v_2) = -v_2$. Par conséquent la matrice de g dans la base (u_1, u_2, v_1, v_2) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En multipliant A par les matrices de u_1, u_2, v_1 et v_2 dans la base canonique, on trouve que $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_1$, $f(v_1) = -v_2$ et $f(v_2) = v_1$, donc la matrice de f dans la base (u_1, u_2, v_1, v_2) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) a) On peut calculer le déterminant de $M(a, b)$: en faisant (par exemple) $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ puis $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 + C_4$ on trouve $(a - b)^2(a + b)^2$. La matrice est donc inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -b$ (i.e. si et seulement si $|a| \neq |b|$).

On peut aussi traiter la question b) avant la a).

b) En faisant les mêmes opérations que ci-dessus, on voit que le rang de $M(a, b)$ est égal au rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 & b & 0 \\ 0 & a+b & 0 & b \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } \text{rg}(M(a, b)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b = 0 \\ 2 & \text{si } |a| = |b| \neq 0 \\ 4 & \text{si } |a| \neq |b| \end{cases}.$$

c) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on peut écrire $M(a, b) = aI + bA^2$, donc $F = \text{Vect}(I, A^2)$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 2 et la famille (I, A^2) en est une base.

d) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On trouve $M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + bd, ad + bc)$, donc F est stable par le produit matriciel.

e) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{et} \quad (a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k.$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on voit que les termes d'indices impairs se simplifient, et on en déduit

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \frac{(a + b)^n + (a - b)^n}{2}.$$

De même, en soustrayant membre à membre ces deux égalités, les termes d'indices pairs se simplifient, et on en déduit

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \frac{(a + b)^n - (a - b)^n}{2}.$$

f) Les matrices I et A^2 commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(M(a, b))^n = (aI + bA^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k A^{2k}.$$

Or on a vu en 2) que $A^{2k} = I$ si k est pair et que $A^{2k} = A^2$ si k est impair. Ainsi

$$\begin{aligned} (M(a, b))^n &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k I + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k A^2 \\ &= \frac{(a + b)^n + (a - b)^n}{2} I + \frac{(a + b)^n - (a - b)^n}{2} A^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a + b)^n + (a - b)^n & 0 & (a + b)^n - (a - b)^n & 0 \\ 0 & (a + b)^n + (a - b)^n & 0 & (a + b)^n - (a - b)^n \\ (a + b)^n - (a - b)^n & 0 & (a + b)^n + (a - b)^n & 0 \\ 0 & (a + b)^n - (a - b)^n & 0 & (a + b)^n + (a - b)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$