

Correction du DNS 32

1) On a $P(X_1 = 1) = \frac{b}{b+r}$ et $P(X_1 = 0) = \frac{r}{b+r} = 1 - \frac{b}{b+r}$ donc X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

2) a) Ces deux événements sont incompatibles (i.e. $(X_1 = 0) \cap (X_1 = 1) = \emptyset$) et leur réunion est l'univers (i.e. $(X_1 = 0) \cup (X_1 = 1) = \Omega$), donc ils forment un système complet d'événements.

b) L'urne contient $b+c$ boules blanches et r boules rouges, donc la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche est $\frac{b+c}{b+c+r}$ et la probabilité qu'elle soit rouge est $\frac{r}{b+c+r}$.

c) L'urne contient b boules blanches et $r+c$ boules rouges, donc la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche est $\frac{b}{b+c+r}$ et la probabilité qu'elle soit rouge est $\frac{r+c}{b+c+r}$.

d) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_2 = 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) \\ &= \frac{b+c}{b+c+r} \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+c+r} \frac{r}{b+r} \\ &= \frac{b(b+c) + br}{(b+c+r)(b+r)} \\ &= \frac{b(b+c+r)}{(b+c+r)(b+r)} \\ &= \frac{b}{b+r} \end{aligned}$$

et $P(X_2 = 0) = 1 - \frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}$, donc X_2 suit également la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

3) a) On a $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_2 = 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) = \frac{b+c}{b+c+r} \frac{b}{b+r} = \frac{b(b+c)}{(b+r)(b+c+r)}$, et de même pour les autres. On obtient le tableau suivant :

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$\frac{r(r+c)}{(b+r)(b+c+r)}$	$\frac{br}{(b+r)(b+c+r)}$
1	$\frac{br}{(b+r)(b+c+r)}$	$\frac{b(b+c)}{(b+r)(b+c+r)}$

b) Ces quatre événements sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers, donc ils forment un système complet d'événements.

c) L'urne contient $b+c$ boules blanches et $r+c$ boules rouges, donc la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche est $\frac{b+c}{b+r+2c}$ et la probabilité qu'elle soit rouge est $\frac{r+c}{b+r+2c}$.

d) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= P(X_3 = 1 | (X_1 = 1, X_2 = 1))P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_3 = 1 | (X_1 = 1, X_2 = 0))P(X_1 = 1, X_2 = 0) \\ &\quad + P(X_3 = 1 | (X_1 = 0, X_2 = 1))P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_3 = 1 | (X_1 = 0, X_2 = 0))P(X_1 = 0, X_2 = 0) \\ &= \frac{b+2c}{b+r+2c} \frac{b(b+c)}{(b+r)(b+c+r)} + \frac{b+c}{b+r+2c} \frac{br}{(b+r)(b+c+r)} + \frac{b+c}{b+r+2c} \frac{br}{(b+r)(b+c+r)} \\ &\quad + \frac{b}{b+r+2c} \frac{r(r+c)}{(b+r)(b+c+r)} \\ &= \frac{b(b+c)(b+r+2c)}{(b+r+2c)(b+c+r)(b+r)} + \frac{br(b+r+2c)}{(b+r+2c)(b+c+r)(b+r)} \\ &= \frac{b(b+c)}{(b+c+r)(b+r)} + \frac{br}{(b+c+r)(b+r)} \\ &= \frac{b(b+c+r)}{(b+c+r)(b+r)} \\ &= \frac{b}{b+r} \end{aligned}$$

et $P(X_3 = 0) = 1 - \frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}$, donc X_3 suit également la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

On peut ainsi conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

4) a) (i) S_n est le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

(ii) S_n est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.

b) (i) On rajoute c boules à chaque tirage, donc après le n^e tirage il y a $b+r+nc$ boules dans l'urne.

(ii) Si $S_n = k$, alors il y a $b+kc$ boules blanches dans l'urne, donc

$$P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1) = \frac{b+kc}{b+r+nc}.$$

(iii) La famille $(S_n = 0, S_n = 1, \dots, S_n = n)$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales, on a

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1)P(S_n = k).$$

(iv) On a $\sum_{k=0}^n P(S_n = k) = 1$ et $\sum_{k=0}^n kP(S_n = k) = E(S_n)$.

(v) D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=0}^n P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1)P(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{b+kc}{b+r+nc} P(S_n = k) \\ &= \frac{b}{b+r+nc} \sum_{k=0}^n P(S_n = k) + \frac{c}{b+r+nc} \sum_{k=0}^n kP(S_n = k) \\ &= \frac{b}{b+r+nc} + \frac{c}{b+r+nc} E(S_n) \\ &= \frac{b+cE(S_n)}{b+r+nc}. \end{aligned}$$

c) (i) On a, par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \frac{b}{b+r} + \dots + \frac{b}{b+r} = \frac{nb}{b+r}.$$

(ii) On a d'après les questions précédentes

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{b+cE(S_n)}{b+r+nc} = \frac{b+c\frac{nb}{b+r}}{b+r+nc} = \frac{b(b+r)+nbc}{(b+r)(b+r+nc)} = \frac{b(b+r+nc)}{(b+r)(b+r+nc)} = \frac{b}{b+r}.$$

(iii) La loi de X_{n+1} est à nouveau la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$.

d) C'est un raisonnement par récurrence forte : on a supposé la propriété vraie à tous les rangs inférieurs ou égaux à n et on l'a démontrée au rang $n+1$. L'initialisation de la récurrence a été faite en 1) et l'hérédité en 4)c).