# Devoir n°33 (non surveillé)

**EXERCICE 1**

Si $P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2} b_k X^k$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$.

1) Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$.

a) Déterminer une base de $H$.

b) Déterminer une base orthonormale de $H$.

c) Déterminer le projeté orthogonal de $X$ sur $H$ puis la distance de $X$ à $H$.

**EXERCICE 2**

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. On munit $E$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E, \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

1) On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Déterminer une base orthonormale de $F$.

2) Déterminer le projeté orthogonal de $f : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace $F$ et en déduire la distance de $f$ à $F$.

**EXERCICE 3**

Étudier la convergence des séries suivantes.

1) $\sum \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 2}\right)$.

2) $\sum \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$.

3) $\sum_{n \geqslant 1} (\ln n + a \ln(n + 1) + b \ln(n + 2))$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer sa somme quand elle converge.

4) $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{5n + 6}{n(n + 1)(n + 2)}$. Calculer sa somme.