Polynômes de Legendre (d'après CCP PC 2018)

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.*

Partie I - Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.
2. Justifier que L_n est de degré n et préciser son coefficient dominant.
3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que $U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$. *On pourra utiliser le théorème de Rolle.*
5. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in]-1, 1[$ deux à deux distincts et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$. Justifier qu'il existe $\beta_1, \dots, \beta_{k+1} \in]-1, 1[$ deux à deux distincts et $\nu \in \mathbb{R}$ tels que $U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$.
6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$.

Partie II - Étude de l'endomorphisme φ

7. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions 8 à 13, n désigne un entier naturel.

8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ. Cet endomorphisme φ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) = \varphi(P)$.

9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.
10. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
11. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 10, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.
12. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un réel λ_k à préciser tel que $\varphi_n(L_k) = \lambda_k L_k$. *On pourra utiliser la question 11.*
13. Déduire de ce qui précède la matrice de φ_n dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

14. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|P\| = \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

15. Établir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle \varphi(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt$, puis que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$.
16. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *On pourra utiliser la question 12.*
17. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle P, L_n \rangle = 0$.
18. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \displaystyle\inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité $d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2$, où $c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle$.
20. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leqslant \|P\|^2$.