Séries

EXERCICE - Transformation d'Abel et applications

1) Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. En remarquant que, pour $k \geqslant 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ *(transformation d'Abel).*

2) On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est réelle décroissante de limite nulle.

a) Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.

c) Établir le *critère spécial des séries alternées* : si (a_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge.

3) Soit θ un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour n entier naturel non nul.

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

PROBLÈME - CCP PSI 2006

À toute suite complexe $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on associe la suite a^* définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

L'objectif du problème est de comparer les propriétés des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.

Partie I

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On suppose que la suite a est définie par $a_n = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Expliciter $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont-elles convergentes ?

2) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite a est définie par $a_n = z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

b) On suppose que $|z| < 1$.

(i) Justifier la convergence de la série $\sum a_n$ et calculer sa somme $A(z)$.

(ii) Justifier la convergence de la série $\sum a_n^*$ et exprimer sa somme en fonction de $A(z)$.

b) On suppose que $|z| \geqslant 1$.

(i) Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

(ii) Quelle est la nature de la série $\sum a_n^*$ si $z = -2$?

(iii) On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de sa somme.

Partie II

Dans cette partie on suppose que la suite a est à valeurs réelles.

1) a) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$ fixé. Donner un équivalent de $\binom{n}{k}$ quand $n \to \infty$ et en déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ quand $n \to +\infty$.

b) Soient a une suite réelle et $q \in \mathbb{N}$ fixé. On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque $n \to +\infty$?

c) Montrer que si (a_n) tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, alors (a_n^*) aussi. On pourra revenir à la définition de la limite.

d) On suppose que $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$. Quelle est la limite de (a_n^*) ?

e) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$ et $U_n = 2^n T_n$.

a) Pour $n \in \{0, \ldots, 3\}$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, i.e. sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$(*) \;\; U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

(i) À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ peut-on s'attendre compte tenu des résultats de la question 2)a) ?

(ii) Établir la formule $(*)$ par récurrence sur n. On pourra remarquer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$.

c) Montrer que si la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$ aussi, et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

d) La convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n^*$?