# Centrale PC 2009

## Partie I - Préliminaires

**I.A -** Pour tout entier $p$ naturel non nul, on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u(n,p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

I.A.1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u(n,p)$ est convergente.

I.A.2) On pose $\sigma(p) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u(n,p)$. Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3) Pour $p \geqslant 2$, et pour $n$ quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n,p-1) - u(n+1,p-1)$ en fonction de $p$ et $u(n,p)$.

I.A.4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de $p$, pour $p \geqslant 2$.

**I.B -** Soit $q$ un entier $\geqslant 2$ et $N$ un entier naturel $\geqslant 1$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} \leqslant \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}.$$

## Partie II - Un exemple d'accélération de la convergence

**II.A -**

II.A.1) Montrer par récurrence l'existence de trois suites $(a_p)$, $(b_p)$ et $(c_p)$ d'entiers naturels définies pour $p \geqslant 2$ telles que, pour tout réel $x$ strictement positif et pour tout entier $p$ on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}.$$

II.A.2) Exprimer $a_{p+1}$, $b_{p+1}$ et $c_{p+1}$ à l'aide de $p$, $b_p$ et $c_p$.

II.A.3) Montrer que : $\forall\, p \geqslant 2, b_p \geqslant c_p \geqslant 0$.

II.A.4) Calculer $a_p$, $b_p$ et $c_p$ pour $p = 2, 3, 4$.

**II.B -** On désire calculer une valeur approchée de $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

II.B.1) En utilisant I.B, déterminer un entier naturel $N$ suffisant pour que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ soit inférieur à $\varepsilon$.

II.B.2) Toujours avec I.B, montrer que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \leqslant \frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6}$ (on pourra minorer simplement le dénominateur). Expliquer alors, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de $\varepsilon$ avec une valeur de $N$ moins grande que celle trouvée à la question II.B.1.

II.B.3) Donner une valeur décimale approchée à $\varepsilon$ près (par défaut) de $\zeta(3)$ en utilisant ce qui précède.

## Partie III - Séries factorielles

Cette partie est indépendante des précédentes.

**III.A -** Pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $x$ strictement positif, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x},\ w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

III.A.1) Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$, définie pour $n \geqslant 1$, est convergente.

III.A.2) En déduire qu'il existe $l(x)$ (dépendant de $x$ et strictement positif) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x)$.

**III.B -** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de complexes et $x$ un réel strictement positif. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n v_n(x)$ est absolument convergente.

**III.C -** On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ soit absolument convergente pour tout réel $x$ strictement positif.

III.C.1) Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de complexes non nuls appartenant à $\mathcal{A}$.

III.C.2) Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{A}$.