Séries - Exercices du cours

EXERCICE 1

1) Posons $S_n = 1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue, positive et croissante sur $[1, +\infty[$, donc d'après la proposition 7 page 3 on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{1} + \int_1^n \sqrt{x}\,dx \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,dx.$$

Or une primitive de $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ sur $[1, +\infty[$ est $x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$, donc cet encadrement devient (après calculs)

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n^{3/2} \leqslant S_n \leqslant \frac{2}{3}(n+1)^{3/2} - \frac{2}{3}.$$

Le membre de gauche et le membre de droite de cet encadrement sont tous deux équivalents à $\frac{2}{3}n^{3/2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc

$$S_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$$

d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents.

2) Posons $T_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc d'après la proposition 7 page 3 on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{1}} + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Or une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$, donc cet encadrement devient (après calculs)

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant T_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

Le membre de gauche et le membre de droite de cet encadrement sont tous deux équivalents à $2\sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc

$$T_n \sim 2\sqrt{n}.$$

EXERCICE 2

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$, donc la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{n}{\ln n}$ diverge grossièrement.

2) On a $\frac{1}{n^2 \ln n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$), donc la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ aussi (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs).

3) On a $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$ aussi (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs).

4) Comparer avec $\frac{1}{n}$ ou avec $\frac{1}{n^2}$ ne permet pas de conclure ici. On va comparer avec $\frac{1}{n^{3/2}}$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{3/2} \ln n}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = 0,$$

donc $\frac{\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Or la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2}$ aussi (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs).

5) L'idée est de comparer avec une intégrale. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_2^n \frac{dx}{x\ln x}$ converge. Or

$$\int_2^n \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^n \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = [\ln(\ln x)]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

6) L'idée est également de comparer avec une intégrale. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_2^n \frac{dx}{x\ln^2 x}$ converge. Or

$$\int_2^n \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_2^n \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^n = -\frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2},$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge.

7) Posons $u_n = \sqrt[3]{n^3+n+1} - \sqrt{n^2+2}$. L'idée est de faire un développement asymptotique pour obtenir un équivalent. On a d'une part

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3+n+1} &= n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \\
&= n\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} \\
&\overset{+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\overset{+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\overset{+\infty}{=} n+\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+2} &= n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} \\
&= n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/2} \\
&\overset{+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\overset{+\infty}{=} n+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$u_n \overset{+\infty}{=} \left(n+\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(n+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \overset{+\infty}{=} -\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{3n}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum u_n$ aussi.

Noter que l'équivalent ci-dessus permet de dire que u_n est négatif à partir d'un certain rang, et donc d'appliquer le théorème sur les séries dont les termes généraux sont équivalents (théorème qui s'applique normalement aux séries à termes positifs, mais est valable également pour les séries à termes négatifs).

EXERCICE 3

Posons $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On va utiliser la règle de d'Alembert. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = -1$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$$

donc d'après la règle de d'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Autre méthode : on peut remarquer que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}{n \times n \times n \times \ldots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \ldots \times \frac{n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times 1 \times \ldots \times 1 = \frac{2}{n^2}.$$

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$ converge.