Produit scalaire - Correction des exercices

EXERCICE 1

1) φ_1 n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas définie positive. Par exemple on a $\varphi_1(X,X) = 0$.

2) φ_2 n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas bilinéaire. Elle n'est pas non plus définie positive (on a également $\varphi_2(X,X) = 0$).

3) φ_3 est bien un produit scalaire. La symétrie et la bilinéarité se montrent facilement. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $\varphi_3(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geqslant 0$, et si $\varphi_3(P,P) = 0$ alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$, donc 0, 1 et 2 sont racines de P, et donc P est nul (polynôme de degré $\leqslant 2$ avec trois racines). Ainsi φ_3 est définie positive.

4) φ_4 est bien un produit scalaire. La symétrie et la bilinéarité se montrent facilement. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $\varphi_4(P,P) = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geqslant 0$, et si $\varphi_4(P,P) = 0$ alors $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$, donc 0 est racine triple de P, et donc P est nul. Ainsi φ_4 est définie positive.

EXERCICE 2

(i) $\langle .,. \rangle$ est symétrique : pour tous $f, g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ on a

$$\langle g, f \rangle = g(0)f(0) + \int_0^1 g'(x)f'(x)\,dx = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx = \langle f, g \rangle.$$

(ii) $\langle .,. \rangle$ est linéaire à gauche : pour tous $f, g, h \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= (\alpha f + \beta g)(0)h(0) + \int_0^1 (\alpha f + \beta g)'(x)h'(x)\,dx \\
&= \alpha f(0)h(0) + \beta g(0)h(0) + \alpha \int_0^1 f'(x)h'(x)\,dx + \beta \int_0^1 g'(x)h'(x)\,dx \\
&= \alpha \left(f(0)h(0) + \int_0^1 f'(x)h'(x)\,dx \right) + \beta \left(g(0)h(0) + \int_0^1 g'(x)h'(x)\,dx \right) \\
&= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle.
\end{aligned}$$

Comme il est symétrique, il est également linéaire à droite.

(iii) $\langle .,. \rangle$ est défini positif :

– Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ on a $\langle f, f \rangle = f(0)^2 + \int_0^1 (f'(x))^2\,dx \geqslant 0$.

– Supposons que $\langle f, f \rangle = 0$. Alors $f(0)^2 = 0$, donc $f(0) = 0$, et $\int_0^1 (f'(x))^2\,dx = 0$, donc, puisque $(f')^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, $(f')^2$ est nulle sur $[0,1]$ et donc f' aussi. Ainsi f est constante sur $[0,1]$. Or $f(0) = 0$, donc f est nulle sur $[0,1]$.

EXERCICE 3

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (1, \ldots, 1)$. On a

$$\langle x, y \rangle = x_1 + \ldots + x_n, \qquad \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \qquad \text{et} \qquad \|y\|^2 = 1^2 + \ldots + 1^2 = n,$$

donc l'inégalité $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$ donne

$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Il y a égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée, i.e. si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$.

EXERCICE 4

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $x = (1, 2, \ldots, n)$ et $y = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n})$. On a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}, \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

donc l'inégalité $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ donne

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}},$$

soit

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

EXERCICE 5

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $u = (x, y, z)$ et $v = (1, 2, 3)$ donne

$$(x + 2y + 3z)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2).$$

Or $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, donc

$$(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14.$$

EXERCICE 6

Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f et à la fonction $g : x \mapsto 1$. On a

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \|f\|^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx \qquad \text{et} \qquad \|g\|^2 = \int_a^b 1^2\,dx = b - a,$$

donc l'inégalité $\langle f, g\rangle^2 \leqslant \|f\|^2\|g\|^2$ donne

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b - a)\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Il y a égalité si et seulement si la famille (f, g) est liée, i.e. si et seulement si la fonction f est constante.

EXERCICE 7 - Polynômes de Lagrange

1) La symétrie et la bilinéarité sont immédiates. Montrons que φ est définie positive. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a

$$\varphi(P, P) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)^2 \geqslant 0$$

et si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P(x_0) = \ldots = P(x_n) = 0$ donc $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines de P deux à deux distinctes. Ainsi P, qui est de degré inférieur ou égal à n, a au moins $n + 1$ racines, donc il est nul.

2) Remarquons d'abord que, pour tous $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tous $j, k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\varphi(L_j, L_k) = \sum_{i=0}^{n} L_j(x_i)L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En effet, si $j \neq k$, on a $L_j(x_i) = 0$ ou $L_k(x_i) = 0$ pour tout i, donc la somme est nulle, et si $j = k$, le terme $L_j(x_j)L_k(x_j)$ vaut 1 et les autres termes sont nuls.

Ainsi les L_j sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 : la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormale. Elle est donc libre, et comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est une base.

EXERCICE 8 (indications)

1) Commencer par vérifier que $\langle P, Q\rangle$ est un réel en montrant que $\overline{\langle P, Q\rangle} = \langle P, Q\rangle$ (utiliser le fait que si $z \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ et faire un changement de variable). La symétrie s'en déduit. La bilinéarité est facile.

Définie positivité : $\langle P,P\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|^2 dt \geqslant 0$ et si $\langle P,P\rangle = 0$ alors $t\mapsto P(e^{it})$ est nulle sur $[-\pi,\pi]$ (raisonnement habituel), donc P a une infinité de racines.

2) $\langle X^p, X^q\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)t}dt$, distinguer les cas $p=q$ et $p\neq q$.

EXERCICE 9

Posons $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(0,1,1)$ et $e_3=(0,0,1)$. La famille (e_1,e_2,e_3) est libre (c'est même une base de $\mathbb{R}^3$). On applique la méthode de Schmidt pour la transformer en une famille orthonormale (f_1,f_2,f_3). On a

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{e_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

car $\|e_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. Ensuite

$$f_2 = \frac{e_2 - \langle e_2,f_1\rangle f_1}{\|e_2 - \langle e_2,f_1\rangle f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$$

car $\langle e_2,f_1\rangle = (1/\sqrt{3})\langle(0,1,1),(1,1,1)\rangle = 2/\sqrt{3}$ donc $e_2-\langle e_2,f_1\rangle f_1 = (0,1,1)-(2/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})(1,1,1) = (-2/3,1/3,1/3)$ et $\|(-2/3,1/3,1/3)\| = \sqrt{6}/3$. Enfin

$$f_3 = \frac{e_3 - \langle e_3,f_1\rangle f_1 - \langle e_3,f_2\rangle f_2}{\|e_3 - \langle e_3,f_1\rangle f_1 - \langle e_3,f_2\rangle f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

car $\langle e_3,f_1\rangle = 1/\sqrt{3}$ et $\langle e_3,f_2\rangle = 1/\sqrt{6}$, ce qui donne après calculs $e_3 - \langle e_3,f_1\rangle f_1 - \langle e_3,f_2\rangle f_2 = (0,-1/2,1/2)$, et on a $\|(0,-1/2,1/2)\| = 1/\sqrt{2}$.

EXERCICE 10 (calculs non détaillés)

1) La famille (u,v) est une base de F. En lui appliquant la méthode de Schmidt on obtient une base orthonormale (u',v') où $u' = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-3,-1,1,3)$.

2) Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$. Alors :

$$x\in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases}\langle u,x\rangle = 0\\ \langle v,x\rangle = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3+2x_4\\ x_2 = -2x_3-3x_4\end{cases} \Leftrightarrow x = x_3(1,-2,1,0)+x_4(2,-3,0,1).$$

Ainsi $F^\perp = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$ où $w_1=(1,-2,1,0)$ et $w_2=(2,-3,0,1)$.

3) La famille (u',v') est une base orthonormale de F donc le projeté orthogonal de w sur F est

$$p_F(w) = \langle w,u'\rangle u' + \langle w,v'\rangle v' = \frac{1}{10}(7,4,1,-2)$$

et la distance de w à F est

$$d(w,F) = \|w-p_F(w)\| = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

EXERCICE 11

1) Cf exercice 1 du cours.

2) On a

$$\langle X^m,X^n\rangle = \int_{-1}^{1} t^m t^n\,dt = \left[\frac{t^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases}\dfrac{2}{m+n+1} & \text{si } m+n \text{ est pair}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

3) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour transformer la famille libre $(1,X,X^2)$ en une famille orthonormale (P_1,P_2,P_3). On a

$$P_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

car $\|1\|^2 = \langle 1,1\rangle = \langle X^0,X^0\rangle = 2$. Ensuite

$$P_2 = \frac{X-\langle X,P_1\rangle P_1}{\|X-\langle X,P_1\rangle P_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}X$$

car $\langle X, P_1\rangle = (1/\sqrt{2})\langle X, 1\rangle = 0$ et $\|X\|^2 = \langle X, x\rangle = 2/3$. Enfin

$$P_3 = \frac{X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 - \langle X^2, P_2\rangle P_2}{\|X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 - \langle X^2, P_2\rangle P_2\|} = \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

car $\langle X^2, P_1\rangle = (1/\sqrt{2})\langle X^2, 1\rangle = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\langle X^2, P_2\rangle = \sqrt{3/2}\langle X^2, X\rangle = 0$, donc

$$X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 - \langle X^2, P_2\rangle P_2 = X^2 - 1/3,$$

et $\|X^2 - 1/3\|^2 = \langle X^2 - 1/3, X^2 - 1/3\rangle = \langle X^2, X^2\rangle - (2/3)\langle X^2, 1\rangle + (1/9)\langle 1, 1\rangle = 8/45$ donc $\|X^2 - 1/3\| = 2\sqrt{2}/(3\sqrt{5})$.

4) La famille (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$, donc le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$p(X^3) = \langle X^3, P_1\rangle P_1 + \langle X^3, P_2\rangle P_2 + \langle X^3, P_3\rangle P_3.$$

Après calculs on trouve

$$\langle X^3, P_1\rangle = 0, \qquad \langle X^3, P_2\rangle = \frac{\sqrt{6}}{5} \qquad \text{et} \qquad \langle X^3, P_3\rangle = 0,$$

donc

$$p(X^3) = \frac{\sqrt{6}}{5}P_2 = \frac{3}{5}X.$$

5) La distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$ est (faire un dessin)

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \|X^3 - p(X^3)\|.$$

Or d'après le théorème de Pythagore

$$\|X^3\|^2 = \|X^3 - p(X^3) + p(X^3)\|^2 = \|X^3 - p(X^3)\|^2 + \|p(X^3)\|^2$$

car les vecteurs $p(X^3)$ et $X^3 - p(X^3)$ sont orthogonaux. Ainsi

$$\|X^3 - p(X^3)\|^2 = \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2.$$

On a facilement $\|X^3\|^2 = 2/7$ et $\|p(X^3)\|^2 = \dfrac{6}{25}$ donc

$$\|X^3 - p(X^3)\|^2 = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$$

et finalement

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2\sqrt{14}}{35}.$$

EXERCICE 12

Rappel : si M et N sont deux matrices carrées et α, β deux scalaires, on a :

$$\mathrm{Tr}(\alpha M + \beta N) = \alpha \,\mathrm{Tr}\, M + \beta \,\mathrm{Tr}\, N \ ; \ \mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM) \ ; \ \mathrm{Tr}({}^tM) = \mathrm{Tr}\, M.$$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons respectivement a_{ij} et b_{ij} les coefficients d'indices (i, j) de ces matrices. Alors le coefficient d'indice (i, j) de ${}^tA$ est $\alpha_{ij} = a_{ji}$ et celui de ${}^tAB$ est

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj},$$

donc $\langle A, B\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$ soit, en intervertissant les sommes et en renommant les indices,

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

On voit ainsi que ce produit scalaire correspond simplement au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$. La norme associée est

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

1) (i) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle B, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tBA)) = \mathrm{Tr}({}^tA{}^t({}^tB)) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \langle A, B\rangle.$$

donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.

(ii) Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \mathrm{Tr}({}^t(\alpha A + \beta B)C) = \mathrm{Tr}(\alpha{}^tAC + \beta{}^tBC) = \alpha\,\mathrm{Tr}({}^tAC) + \beta\,\mathrm{Tr}({}^tBC) = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle.$$

donc $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche. Comme il est symétrique, il l'est aussi à droite.

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\langle A, A\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 0$, et $\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si tous les a_{ij} sont nuls, i.e. si et seulement si $A = 0$. Ainsi $\langle .,.\rangle$ est défini positif.

2) La base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la famille des matrices E_{ij} dont le coefficient d'indice (i,j) est 1 et les autres sont nuls (avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$). D'après l'égalité établie avant le 1), on a

$$\langle E_{ij}, E_{kl}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi les matrices de $\mathcal{B}$ sont deux à deux orthogonales et de norme 1, donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

3) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux matrices I et A. On a $\langle I, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tIA) = \mathrm{Tr}(A)$, $\|I\|^2 = \langle I, I\rangle = \mathrm{Tr}({}^tII) = \mathrm{Tr}(I) = n$ et $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAA)$ donc l'inégalité $\langle I, A\rangle^2 \leqslant \|I\|^2\|A\|^2$ donne

$$(\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant n\,\mathrm{Tr}({}^tAA).$$

Il y a égalité si et seulement si la famille (I, A) est liée, i.e. si et seulement si A est une matrice scalaire (de la forme λI avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

4) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux matrices A et J où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. On a

$$\langle A, J\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \qquad \text{et} \qquad \|J\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2,$$

donc l'inégalité $|\langle A, J\rangle| \leqslant \|A\|\|J\|$ donne

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Il y a égalité si et seulement si la famille (A, J) est liée, i.e. si et seulement si les coefficients de A sont tous égaux.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$. Alors

$$\langle A, D\rangle = d_1a_{11} + \ldots + d_na_{nn}.$$

On voit ainsi que $\langle A, D\rangle = 0$ pour toute matrice diagonale D si et seulement si $a_{11} = \ldots = a_{nn} = 0$ (pour le sens direct, considérer $D = E_{ii}$). Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$ est l'ensemble des matrices dont la diagonale est nulle.

6) Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle S, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tSA) = \mathrm{Tr}(SA),$$

et

$$\langle A, S\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAS) = \mathrm{Tr}(-AS) = -\mathrm{Tr}(AS) = -\mathrm{Tr}(SA).$$

Comme $\langle S, A\rangle = \langle A, S\rangle$, on en déduit que $\langle S, A\rangle = 0$. Ainsi $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

De plus $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires, et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ également (car on est en dimension finie). Ainsi $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ ont la même dimension.

On en déduit que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

7) On a

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) \\
&\leqslant \|A\|^2\|B\|^2,
\end{aligned}$$

donc $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

EXERCICE 13

1) Supposons que $F \subset G$ et montrons que $G^\perp \subset F^\perp$.

Soit $x \in G^\perp$. Soit $y \in F$. Alors $y \in G$, donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ainsi $x \in F^\perp$.

2) ($\subset$) Montrons que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

On a $F \subset F+G$, donc, d'après le 1), $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même on a $G \subset F+G$, donc $(F+G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

($\supset$) Montrons que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F+G$. Il existe donc $y_1 \in F$ et $y_2 \in G$ tels que $y = y_1 + y_2$. Alors $\langle x, y\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle = 0$ car, d'une part, $x \in F^\perp$ et $y_1 \in F$ donc $\langle x, y_1\rangle = 0$ et, d'autre part, $x \in G^\perp$ et $y_2 \in G$ donc $\langle x, y_2\rangle = 0$. Ainsi $x \in (F+G)^\perp$.

Conclusion : $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.

3) D'après le 2) appliqué à $F^\perp$ et à $G^\perp$, on a $(F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = (F^\perp + G^\perp)^\perp$, soit $F \cap G = (F^\perp + G^\perp)^\perp$ (car F et G sont de dimensions finies). En passant à l'orthogonal on obtient

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$