

Produit scalaire - Exercices du cours

EXERCICE 1

1) (i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique : pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a

$$\langle Q, P \rangle = \int_0^1 Q(x)P(x) dx = \int_0^1 P(x)Q(x) dx = \langle P, Q \rangle.$$

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\langle \alpha P + \beta Q, R \rangle = \int_0^1 (\alpha P + \beta Q)(x)R(x) dx = \alpha \int_0^1 P(x)R(x) dx + \beta \int_0^1 Q(x)R(x) dx = \alpha \langle P, R \rangle + \beta \langle Q, R \rangle.$$

Comme il est symétrique, il est également linéaire à droite.

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif :

– Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(x) dx \geq 0$.

– Supposons que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $\int_0^1 P^2(x) dx = 0$, donc, puisque la fonction polynomiale P^2 est continue et positive sur $[0, 1]$, P^2 est nulle sur $[0, 1]$ et donc P aussi. Le polynôme P admet ainsi une infinité de racines, donc il est nul.

2) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour transformer la famille libre $(1, X, X^2)$ en une famille orthonormale (P_1, P_2, P_3) . On a

$$P_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1$$

car $\|1\|^2 = \int_0^1 1 dx = 1$. Ensuite

$$P_2 = \frac{X - \langle X, P_1 \rangle P_1}{\|X - \langle X, P_1 \rangle P_1\|} = 2\sqrt{3} \left(X - \frac{1}{2} \right)$$

car $\langle X, P_1 \rangle = \langle X, 1 \rangle = \int_0^1 x dx = 1/2$ et $\|X - 1/2\|^2 = \int_0^1 (x - 1/2)^2 dx = 1/12$ (après calculs) donc $\|X - 1/2\| = 1/(2\sqrt{3})$. Enfin

$$P_3 = \frac{X^2 - \langle X^2, P_1 \rangle P_1 - \langle X^2, P_2 \rangle P_2}{\|X^2 - \langle X^2, P_1 \rangle P_1 - \langle X^2, P_2 \rangle P_2\|} = 6\sqrt{5} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right)$$

car $\langle X^2, P_1 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle = 1/3$, $\langle X^2, P_2 \rangle = 2\sqrt{3}(\langle X^2, X \rangle - (1/2)\langle X^2, 1 \rangle) = 2\sqrt{3}(1/4 - 1/6) = \sqrt{3}/6$, donc

$$X^2 - \langle X^2, P_1 \rangle P_1 - \langle X^2, P_2 \rangle P_2 = X^2 - 1/3 - (\sqrt{3}/6)2\sqrt{3}(X - 1/2) = X^2 - X + 1/6,$$

et $\|X^2 - X + 1/6\|^2 = 1/180$ (après calculs) donc $\|X^2 - X + 1/6\| = 1/(6\sqrt{5})$.

EXERCICE 2

La famille (P_1, P_2, P_3) obtenue à l'exercice 1 est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$, donc d'après la proposition 12 le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$p(X^3) = \langle X^3, P_1 \rangle P_1 + \langle X^3, P_2 \rangle P_2 + \langle X^3, P_3 \rangle P_3.$$

Après calculs on trouve

$$\langle X^3, P_1 \rangle = \frac{1}{4}, \quad \langle X^3, P_2 \rangle = \frac{3\sqrt{3}}{20} \quad \text{et} \quad \langle X^3, P_3 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{20},$$

donc

$$p(X^3) = \frac{1}{4}P_1 + \frac{3\sqrt{3}}{20}P_2 + \frac{\sqrt{5}}{20}P_3,$$

qui donne en remplaçant P_1, P_2 et P_3 par leurs valeurs et en développant

$$p(X^3) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}.$$

La distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \|X^3 - p(X^3)\|$$

d'après la proposition 14 (faire un dessin). Or d'après le théorème de Pythagore

$$\|X^3\|^2 = \|X^3 - p(X^3) + p(X^3)\|^2 = \|X^3 - p(X^3)\|^2 + \|p(X^3)\|^2$$

car les vecteurs $p(X^3)$ et $X^3 - p(X^3)$ sont orthogonaux. Ainsi

$$\|X^3 - p(X^3)\|^2 = \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2.$$

On a facilement $\|X^3\|^2 = 1/7$, et puisque la famille (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ on a

$$\|p(X^3)\|^2 = \left\| \frac{1}{4}P_1 + \frac{3\sqrt{3}}{20}P_2 + \frac{\sqrt{5}}{20}P_3 \right\|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{20}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{20}\right)^2 = \frac{57}{400}.$$

Ainsi

$$\|X^3 - p(X^3)\|^2 = \frac{1}{7} - \frac{57}{400} = \frac{1}{2800}$$

et finalement

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{1}{\sqrt{2800}} = \frac{1}{20\sqrt{7}}.$$