Fonctions de deux variables - Exercices du cours

EXERCICE 1

Commençons par déterminer les points critiques de f. La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2(x+y-1) = 4x+2y-2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y-1)+2y = 2x+4y-2.$$

Par conséquent :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+2y-2=0 \\ 2x+4y-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{array}\right. .$$

Le seul point critique de f est donc $(1/3, 1/3)$. Pour déterminer si f admet un extremum local en ce point on va poser $x = 1/3+h$ et $y = 1/3+k$. On a en développant

$$f(1/3+h, 1/3+k) = 1/3 + 2h^2 + 2k^2 + 2hk = 1/3 + h^2 + k^2 + (h+k)^2 \geqslant 1/3 = f(1/3,1/3)$$

pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. La fonction admet donc un minimum global en $(1/3, 1/3)$.

Remarque : en deuxième année vous verrez des techniques bien plus efficaces pour déterminer la nature d'un point critique.