

Fonctions de deux variables - Correction des exercices

EXERCICE 1

Soit B une boule ouverte de \mathbb{R}^2 . Soient x son centre et R son rayon.

Soit $a \in B$. Soit $d = \|x - a\|$ et $r = R - d$ (il faut faire un dessin pour comprendre l'idée). On va montrer que $B(a, r) \subset B$.

Soit donc $y \in B(a, r)$. Alors d'après l'inégalité triangulaire

$$\|y - x\| = \|y - a + a - x\| \leq \|y - a\| + \|a - x\| \leq r + d = R$$

donc $y \in B$.

On a ainsi montré que pour tout $a \in B$ il existe une boule ouverte de centre a incluse dans B . Cela signifie exactement que B est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

EXERCICE 2

1) Soient U_1 et U_2 deux ouverts de \mathbb{R}^2 . Soit $a \in U_1 \cup U_2$. Alors $a \in U_1$ ou $a \in U_2$.

Si $a \in U_1$ alors il existe une boule ouverte de centre a incluse dans U_1 , donc dans $U_1 \cup U_2$. De même, si $a \in U_2$ alors il existe une boule ouverte de centre a incluse dans U_2 , donc dans $U_1 \cup U_2$.

Conclusion : $U_1 \cup U_2$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

2) Soient U_1 et U_2 deux ouverts de \mathbb{R}^2 . Soit $a \in U_1 \cap U_2$. Alors $a \in U_1$ donc il existe $r_1 > 0$ tel que $B(a, r_1) \subset U_1$. De même $a \in U_2$ donc il existe $r_2 > 0$ tel que $B(a, r_2) \subset U_2$.

Posons $r = \min(r_1, r_2)$. Alors $B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset U_1$ et $B(a, r) \subset B(a, r_2) \subset U_2$ donc $B(a, r) \subset U_1 \cap U_2$.

Conclusion : $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

EXERCICE 3

1) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 2.$$

2) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy).$$

3) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

4) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $U = (\mathbb{R}_+^*)^2 \cup (\mathbb{R}_-^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in U$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y}.$$

5) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

6) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $B(0, 1)$ (car on doit avoir $-1 < x^2 + y^2 < 1$) et pour tout $(x, y) \in B(0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}.$$

EXERCICE 6

1) On a $x + y > 0$ et $x - y > 0$ si et seulement si $-x < y < x$. La fonction f est donc définie sur la partie U du demi-plan $x > 0$ délimitée par les demi-droites $y = x$ et $y = -x$ (c'est un ouvert de \mathbb{R}^2).

2) La fonction \ln est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2y}{x^2 - y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2}.$$

3) Le développement limité d'ordre de f en $(1, 0)$ est

$$f(x, y) = f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)(y - 0) + o(\|(x - 1, y - 0)\|)$$

soit

$$f(x, y) = 2y + o(\|(x - 1, y)\|)$$

au voisinage de $(1, 0)$. L'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en $(1, 0)$ est donc $z = 2y$.

EXERCICE 7

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et ses dérivées partielles sont définies par $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$ donc l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^2y$ en $(1, 2)$ est

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

soit $z = 2 + 4(x - 1) + y - 2$ ou encore $z = 4x + y - 4$.

EXERCICE 8

Les fonctions ch et sh sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 donc la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et, d'après la règle de la chaîne :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\text{ch } t, \text{sh } t) \text{sh } t + \frac{\partial f}{\partial y}(\text{ch } t, \text{sh } t) \text{ch } t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 9

Les fonctions $x : (s, t) \mapsto st$ et $y : (s, t) \mapsto \frac{s}{t}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur A et la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 donc la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur A et, d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) \\ &= t \frac{\partial f}{\partial x} \left(st, \frac{s}{t} \right) + \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial y} \left(st, \frac{s}{t} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \\ &= s \frac{\partial f}{\partial x} \left(st, \frac{s}{t} \right) - \frac{s}{t^2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(st, \frac{s}{t} \right) \end{aligned}$$

pour tout $(s, t) \in A$.