

Séries - Correction des exercices

EXERCICE 1

1) $\frac{n+1}{n^2+n+1} \stackrel{+}{\sim} \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2+n+1}$ diverge par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

2) On a $\frac{n^2}{2^n+n} \stackrel{+}{\sim} \frac{n^2}{2^n}$ et $\frac{n^2}{2^n} \stackrel{+}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{\frac{n^2}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4}{2^n} \xrightarrow{+} 0$.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n+n}$ converge par les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs.

3) On a $\frac{1}{n} \stackrel{+}{\sim} o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ aussi (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs).

4) La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ est une série alternée. Elle ne converge pas absolument car la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge.

Cependant, la suite de terme général $\left| \frac{(-1)^n}{\ln n} \right| = \frac{1}{\ln n}$ est décroissante et tend vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

5) On fait un développement asymptotique pour obtenir un équivalent simple. On a

$$\operatorname{ch} x \stackrel{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos x \stackrel{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\operatorname{ch} \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n} \stackrel{+}{\sim} 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) donc la série $\sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n}\right)$ aussi par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

6) Posons $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$. On fait un développement asymptotique pour obtenir un équivalent simple. On a d'une part

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^3 + an} &= n \sqrt[3]{1 + \frac{a}{n^2}} \\ &= n \left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{1/3} \\ &\stackrel{+}{\sim} n \left(1 + \frac{1}{3} \frac{a}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\stackrel{+}{\sim} n + \frac{a}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 3} &= n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} \\ &= n \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{1/2} \\ &\stackrel{+}{\sim} n \left(1 + \frac{1}{2} \frac{3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\stackrel{+}{\sim} n + \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$u_n \stackrel{+}{\sim} \left(n + \frac{a}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(n + \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \stackrel{+}{\sim} \frac{2a-9}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 9/2$, alors $u_n \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{2a-9}{6n}$ donc la série diverge.

Si $a = 9/2$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge aussi.

On notera l'utilisation des O dans les développements limités/asymptotiques qui permet de conclure dans le cas où le terme prépondérant disparaît sans avoir à augmenter l'ordre auquel on fait les développements.

7) On a

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \stackrel{+\infty}{\sim} 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) - 1 \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

Or la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$ diverge car $\frac{1}{n} \stackrel{+\infty}{\sim} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série de terme général $n^{\frac{1}{n}} - 1$ diverge aussi par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

8) On a

$$\frac{1}{n^{1+1/n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{\ln n}{n}} \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$. Par conséquent la série diverge.

9) On compare avec une intégrale. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$ est continue, positive et décroissante sur $[3, +\infty[$

donc la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ converge si et seulement si la suite de terme général $\int_3^n \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ converge. Or

$$\int_3^n \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int_3^n \frac{\frac{1}{x \ln x}}{\ln(\ln x)} dx = [\ln(\ln(\ln x))]_3^n = \ln(\ln(\ln n)) - \ln(\ln(\ln 3)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ diverge.

10) Posons $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. On va utiliser la règle de d'Alembert. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} < 1$$

donc la série $\sum u_n$ converge.

11) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = (n+1)^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln(n+1)}{n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln(n+1)}{n}} = 1$, et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ diverge grossièrement.

12) Posons $u_n = \ln \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. On fait un développement asymptotique pour obtenir un équivalent simple.

On a

$$\sin x \stackrel{0}{\sim} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6\sqrt{n}^3} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}^3}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &\stackrel{+\infty}{\sim} \ln \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6\sqrt{n}^3} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}^3}\right) \right) \\ &\stackrel{+\infty}{\sim} \ln \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{+\infty}{=} \ln \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln \left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&\stackrel{+\infty}{=} -\ln \left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&\stackrel{+\infty}{=} \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

car $\ln(1+x) = x + o(x)$ au voisinage de 0. Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

13) Posons $u_n = \frac{n^n}{n!a^n}$. On va utiliser la règle de d'Alembert. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!a^{n+1}} \frac{n!a^n}{n^n} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{a(n+1)n^n} \\
&= \frac{(n+1)^n}{an^n} \\
&= \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\
&= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.
\end{aligned}$$

Or $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ car $n \ln(1+1/n) \stackrel{+\infty}{\sim} n \times (1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{a}.$$

Par conséquent :

– si $e > a$, alors $\frac{e}{a} > 1$ et la série $\sum u_n$ diverge,

– si $e < a$, alors $\frac{e}{a} < 1$ et la série $\sum u_n$ converge.

Si $e = a$, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. On peut utiliser la formule de Stirling :

$$n! \stackrel{+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

qui donne

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n} \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{n^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (car $1/2 \leq 1$), donc la série $\sum u_n$ aussi.

14) Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$. On a $|u_n| = \frac{1}{n^2 + 1} \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, donc la série $\sum |u_n|$ converge par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs. Par conséquent la série $\sum u_n$ converge absolument, et donc elle converge.

On aurait aussi pu utiliser le critère spécial des séries alternées.

EXERCICE 2

1) On a $\frac{1}{n(n+1)} \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

Pour calculer sa somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$, on décompose $\frac{1}{k(k+1)}$ en éléments simples. On obtient

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi par télescopage

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

2) On a $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

Pour calculer sa somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, on décompose $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en éléments simples. On obtient après calculs

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+2}.$$

On obtient à nouveau une somme télescopique qu'on peut calculer en faisant des changements d'indice :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

3) On a

$$\ln \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right) = \ln \left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2 + 3n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

donc la série converge par la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

Pour calculer la somme de la série, l'idée est de factoriser les polynômes pour pouvoir séparer le ln et faire apparaître une nouvelle fois une somme télescopique. On a

$$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2) \quad \text{et} \quad n^2 + 3n = n(n+3)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la somme partielle devient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 3k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k) - \ln(k+3)) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k+3) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=4}^{n+3} \ln(k) \\ &= \ln(2) + \ln(3) + \ln(n+1) + \ln(3) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2) - \ln(3) - \ln(n+1) - \ln(n+2) - \ln(n+3) \\ &= \ln(3) + \ln(n+1) - \ln(n+3) \\ &= \ln(3) + \ln \left(\frac{n+1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(3).$$

EXERCICE 6

La série ne converge pas absolument, mais la suite de terme général $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$ est décroissante et tend vers 0,

donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ la somme partielle de la série. On a d'après l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-1)^{k-1} t^{k-1} dt \quad (\text{car } (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-t)^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} dt \quad (\text{somme géométrique}) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

De plus

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt = 0,$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2.$$

EXERCICE 7

Supposons d'abord que $\alpha < 1$. Alors quel que soit β on a $\frac{1}{n} \stackrel{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$ (le quotient donne $n^{\alpha-1} (\ln n)^\beta$ et tend vers 0 en $+\infty$) donc la série diverge.

Supposons ensuite que $\alpha > 1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < \alpha$. Alors quel que soit β on a $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \stackrel{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ (le quotient donne $n^{\gamma-\alpha} (\ln n)^{-\beta}$ et tend vers 0 en $+\infty$) donc la série converge.

Supposons enfin que $\alpha = 1$.

Si $\beta = 1$ la série diverge (déjà vu à l'exercice 2 du cours).

Si $\beta < 1$ on a $\frac{1}{n \ln n} \stackrel{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n(\ln n)^\beta}\right)$ (le quotient donne $(\ln n)^{\beta-1}$ et tend vers 0 en $+\infty$) donc la série diverge également.

Si $\beta > 1$ on compare avec une intégrale. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si la suite de terme général $\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ converge. Or

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int_2^n \frac{1}{x} (\ln x)^{-\beta} dx = \left[\frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right]_2^n = \frac{(\ln n)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1},$$

donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge.

Conclusion : la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

EXERCICE 8

L'idée est d'utiliser la proposition 5 page 2 : une suite (u_n) converge si et seulement si la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On fait un développement asymptotique pour trouver un équivalent. On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n(1 + \frac{1}{n})} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &\stackrel{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\stackrel{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$u_{n+1} - u_n \stackrel{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \stackrel{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge, et donc, d'après la proposition rappelée ci-dessus, la suite (u_n) converge.

Remarque : la limite de (u_n) est appelée **constante d'Euler** et notée γ . On a ainsi

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \stackrel{+\infty}{\sim} \ln n + \gamma + o(1).$$

Une valeur approchée de γ est 0,577. On conjecture qu'elle est irrationnelle, mais personne n'a jamais réussi à le démontrer.

EXERCICE 10

L'idée est à chaque fois de comparer avec une intégrale.

1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a (faire un dessin)

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^a} \leq \frac{1}{k^a} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^a}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^a} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^a}$$

soit, par la relation de Chasles,

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^a} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^a}$$

qui donne après calcul des intégrales

$$\frac{(n+1)^{1-a} - 1}{1-a} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \frac{n^{1-a} - 1}{1-a}.$$

Le membre de gauche et le membre de droite de cet encadrement sont tous les deux équivalents à $\frac{n^{1-a}}{1-a}$ donc, d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}.$$

Si on s'interdit d'utiliser le théorème des gendarmes pour les équivalents, on divise chaque membre de l'encadrement par $\frac{n^{1-a}}{1-a}$ et on utilise le théorème des gendarmes classique.

2) Noter que la somme est bien définie car c'est le reste d'ordre n d'une série de Riemann qui converge. On procède comme en 1) mais on somme de $n+1$ à p où $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p$. On obtient

$$\sum_{k=n+1}^p \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^a} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^a} \leq \sum_{k=n+1}^p \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^a}$$

soit, par la relation de Chasles,

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{dx}{x^a} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^a} \leq \int_n^p \frac{dx}{x^a}$$

qui donne après calcul des intégrales

$$\frac{(p+1)^{1-a} - (n+1)^{1-a}}{1-a} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^a} \leq \frac{p^{1-a} - n^{1-a}}{1-a}.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient

$$\frac{-(n+1)^{1-a}}{1-a} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \leq \frac{-n^{1-a}}{1-a}$$

qui s'écrit plus agréablement

$$\frac{1}{a-1} \frac{1}{(n+1)^{a-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \leq \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}.$$

Le membre de gauche et le membre de droite de cet encadrement sont tous les deux équivalents à $\frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$ donc, d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}.$$

EXERCICE 12

1) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas absolument, mais elle converge d'après le critère spécial des séries alternées car

la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.

2) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n - \ln n}$ ne converge pas absolument puisque $\left| \frac{(-1)^n \ln n}{n - \ln n} \right| = \frac{\ln n}{n - \ln n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$.

Posons $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$ pour tout $x > 0$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} < 0$ si $x > e$. Ainsi la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et donc la suite de terme général $\frac{\ln n}{n - \ln n}$ est

décroissante à partir du rang $n = 2$. De plus elle tend vers 0 en $+\infty$, donc d'après le critère spécial des séries alternées la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n - \ln n}$ converge.

3) On fait un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\ &\stackrel{+\infty}{\equiv} \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &\stackrel{+\infty}{\equiv} \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\stackrel{+\infty}{\equiv} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\stackrel{+\infty}{\equiv} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\stackrel{+\infty}{\equiv} \frac{(-1)^n \pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Or la série de terme général $\frac{(-1)^n \pi}{2n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, donc la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ également comme somme de deux séries convergentes.

4) Le critère spécial des séries alternées ne fonctionne pas ici. On fait encore un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a}\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^a}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{a/2}} \left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right)^{-1/2} \\ &\stackrel{+\infty}{\equiv} \frac{(-1)^n}{n^{a/2}} \left(1-\frac{(-1)^n}{2n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) \\ &\stackrel{+\infty}{\equiv} \frac{(-1)^n}{n^{a/2}} - \frac{1}{2n^{3a/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3a/2}}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^{a/2}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, et $-\frac{1}{2n^{3a/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3a/2}}\right) \stackrel{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{3a/2}}$ est le terme général d'une série qui converge si et seulement si $\frac{3a}{2} > 1$. Ainsi :

- Si $a > \frac{2}{3}$ alors la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}}$ converge comme somme de deux séries convergentes.

- Si $a \leq \frac{2}{3}$ alors la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a+(-1)^n}}$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Noter que si $a \leq 0$, la série diverge grossièrement.