Correction du DNS 33

EXERCICE 1

1) Soient $P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2} b_k X^k \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\langle Q, P\rangle = \sum_{k=0}^{2} b_k a_k = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k = \langle P, Q\rangle$$

donc $\langle ., .\rangle$ est symétrique.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{2} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{2} c_k X^k$. On a

$$\langle \alpha P + \beta Q, R\rangle = \sum_{k=0}^{2} (\alpha a_k + \beta b_k) c_k = \alpha \sum_{k=0}^{2} a_k c_k + \beta \sum_{k=0}^{2} b_k c_k = \alpha \langle P, R\rangle + \beta \langle Q, R\rangle$$

donc $\langle ., .\rangle$ est linéaire à gauche, et donc aussi à droite car il est symétrique.

Soit $P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k$. Alors

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{2} a_k^2 \geqslant 0.$$

De plus si $\langle P, P\rangle = 0$ alors $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ donc $P = 0$. Ainsi $\langle ., .\rangle$ est défini positif.

Conclusion : $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) a) Il y a plusieurs manières de procéder. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$P \in H \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b \Leftrightarrow P = aX^2 + bX - a - b \Leftrightarrow P = a(X^2 - 1) + b(X - 1).$$

Ainsi $H = \mathrm{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$. De plus la famille $(X - 1, X^2 - 1)$ est libre donc c'est une base de H.

b) On applique la méthode de Schmidt pour transformer la famille (P_1, P_2) où $P_1 = X - 1$ et $P_2 = X^2 - 1$ en une base orthonormale de H (Q_1, Q_2). On obtient

$$Q_1 = \frac{P_1}{\|P_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1)$$

et

$$Q_2 = \frac{P_2 - \langle P_2, Q_1\rangle Q_1}{\|P_2 - \langle P_2, Q_1\rangle Q_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2X - X - 1).$$

c) La famille (Q_1, Q_2) est une base orthonormale de H donc le projeté orthogonal de X sur H est

$$p_H(X) = \langle X, Q_1\rangle Q_1 + \langle X, Q_2\rangle Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} Q_2 = -\frac{1}{3}X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{1}{3}.$$

La distance de X à H est

$$d(X, H) = \|X - p_H(X)\| = \left\| \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{3} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On peut aussi dire que d'après le théorème de Pythagore $\|X - p_H(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|p_H(X)\|^2$. Or $\|X\|^2 = 1$ et puisque la famille (Q_1, Q_2) est orthonormale on a $\|p_H(X)\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ donc $\|X - p_H(X)\|^2 = \frac{1}{3}$ et on retrouve le résultat.

EXERCICE 2

1) On a $\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0$ donc les vecteurs u et v sont orthogonaux. Il suffit de les normer. On a $\|u\|^2 = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2$ et $\|v\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = 2/3$ donc la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}v\right)$ est une base orthonormale de F.

2) Le projeté orthogonal de f sur F est

$$p_F(f) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}u\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}u + \langle f, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}v\rangle \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}v = \frac{1}{2}\langle f, u\rangle u + \frac{3}{2}\langle f, v\rangle v$$

Or $\langle f, u\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^t\,dt = e - e^{-1}$ et en intégrant par parties on trouve $\langle f, u\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} te^t\,dt = 2e^{-1}$ donc

$$p_F(f) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t.$$

La distance de f à F est

$$d(f, F) = \|f - p_F(f)\| = \sqrt{1 - 7e^{-2}}.$$

On peut faire le calcul directement ou utiliser le théorème de Pythagore $\|f - p_F(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_F(f)\|^2$.

EXERCICE 3

1) Soit $u_n = \sqrt[3]{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 2}$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3+n+1} &= n\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \\
&= n\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)^{1/3} \\
&\underset{+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} n + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+2} &= n\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} \\
&= n\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{1/2} \\
&\underset{+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$u_n \underset{+\infty}{=} \left(n + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{3n}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum u_n$ aussi (série à termes négatifs à partir d'un certain rang).

2) Posons $u_n = \dfrac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2} = \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3(n+1)}{2(2n+1)}$$

qui tend vers $\dfrac{3}{4} < 1$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

3) Posons $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$. On fait un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln n + a\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) + b\ln\left(n\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right) \\
&= \ln n + a\ln n + a\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b\ln n + b\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} (a+b+1)\ln n + a\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} (a+b+1)\ln n + \frac{2a+b}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi :

– Si $a+b+1 \neq 0$ alors $u_n \sim (a+b+1)\ln n$ donc la série diverge grossièrement.

– Si $a+b+1=0$ et $a+2b \neq 0$ alors $u_n \sim \dfrac{2a+b}{2n}$ donc la série diverge puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

– Si $a+b+1=0$ et $a+2b=0$, i.e. si $a=-2$ et $b=1$, alors $u_n \overset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge.

Calculons la somme de la série dans ce dernier cas. La somme partielle d'ordre p de la série est

$$\begin{aligned}
S_p &= \sum_{n=1}^{p}(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)) \\
&= \sum_{n=1}^{p} \ln n - 2\sum_{n=1}^{p} \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{p} \ln(n+2) \\
&= \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln p - 2(\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln p + \ln(p+1)) + \ln 3 + \ldots + \ln p + \ln(p+1) + \ln(p+2) \\
&= \ln 2 - \ln(p+1) + \ln(p+2) \\
&= \ln 2 + \ln\frac{p+2}{p+1}.
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{p\to+\infty} \ln\dfrac{p+2}{p+1} = 0$ donc la somme de la série est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} S_p = \ln 2.$$

4) On a $\dfrac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{5}{n^2}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum u_n$ aussi (séries à termes positifs).

On décompose en éléments simples :

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}.$$

La somme partielle d'ordre p de la série est donc

$$\begin{aligned}
S_p &= \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) \\
&= 3\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n+1} - 2\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n+2} \\
&= 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}\right) \\
&= 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2} \\
&= 4 - \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2}.
\end{aligned}$$

La somme de la série est donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} S_p = 4.$$