

## Correction du DNS 33

### EXERCICE 1

1) Soient  $P = \sum_{k=0}^2 a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^2 b_k X^k \in \mathbb{R}_2[X]$ . On a

$$\langle Q, P \rangle = \sum_{k=0}^2 b_k a_k = \sum_{k=0}^2 a_k b_k = \langle P, Q \rangle$$

donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est symétrique.

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $P = \sum_{k=0}^2 a_k X^k$ ,  $Q = \sum_{k=0}^2 b_k X^k$  et  $R = \sum_{k=0}^2 c_k X^k$ . On a

$$\langle \alpha P + \beta Q, R \rangle = \sum_{k=0}^2 (\alpha a_k + \beta b_k) c_k = \alpha \sum_{k=0}^2 a_k c_k + \beta \sum_{k=0}^2 b_k c_k = \alpha \langle P, R \rangle + \beta \langle Q, R \rangle$$

donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est linéaire à gauche, et donc aussi à droite car il est symétrique.

Soit  $P = \sum_{k=0}^2 a_k X^k$ . Alors

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^2 a_k^2 \geq 0.$$

De plus si  $\langle P, P \rangle = 0$  alors  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  donc  $P = 0$ . Ainsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini positif.

Conclusion :  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2) a) Il y a plusieurs manières de procéder. Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ . Alors :

$$P \in H \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b \Leftrightarrow P = aX^2 + bX - a - b \Leftrightarrow P = a(X^2 - 1) + b(X - 1).$$

Ainsi  $H = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$ . De plus la famille  $(X - 1, X^2 - 1)$  est libre donc c'est une base de  $H$ .

b) On applique la méthode de Schmidt pour transformer la famille  $(P_1, P_2)$  où  $P_1 = X - 1$  et  $P_2 = X^2 - 1$  en une base orthonormale de  $H$   $(Q_1, Q_2)$ . On obtient

$$Q_1 = \frac{P_1}{\|P_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1)$$

et

$$Q_2 = \frac{P_2 - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1}{\|P_2 - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2X^2 - X - 1).$$

c) La famille  $(Q_1, Q_2)$  est une base orthonormale de  $H$  donc le projeté orthogonal de  $X$  sur  $H$  est

$$p_H(X) = \langle X, Q_1 \rangle Q_1 + \langle X, Q_2 \rangle Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} Q_2 = -\frac{1}{3} X^2 + \frac{2}{3} X - \frac{1}{3}.$$

La distance de  $X$  à  $H$  est

$$d(X, H) = \|X - p_H(X)\| = \left\| \frac{1}{3} X^2 + \frac{1}{3} X + \frac{1}{3} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On peut aussi dire que d'après le théorème de Pythagore  $\|X - p_H(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|p_H(X)\|^2$ . Or  $\|X\|^2 = 1$  et puisque la famille  $(Q_1, Q_2)$  est orthonormale on a  $\|p_H(X)\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$  donc  $\|X - p_H(X)\|^2 = \frac{1}{3}$  et on retrouve le résultat.

### EXERCICE 2

1) On a  $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 t \, dt = 0$  donc les vecteurs  $u$  et  $v$  sont orthogonaux. Il suffit de les normer. On a  $\|u\|^2 = \int_{-1}^1 1 \, dt = 2$

et  $\|v\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 \, dt = 2/3$  donc la famille  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}} u, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} v \right)$  est une base orthonormale de  $F$ .

2) Le projeté orthogonal de  $f$  sur  $F$  est

$$p_F(f) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} u \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} u + \langle f, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} v \rangle \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} v = \frac{1}{2} \langle f, u \rangle u + \frac{3}{2} \langle f, v \rangle v$$

Or  $\langle f, u \rangle = \int_{-1}^1 e^t dt = e - e^{-1}$  et en intégrant par parties on trouve  $\langle f, u \rangle = \int_{-1}^1 t e^t dt = 2e^{-1}$  donc

$$p_F(f) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t.$$

La distance de  $f$  à  $F$  est

$$d(f, F) = \|f - p_F(f)\| = \sqrt{1 - 7e^{-2}}.$$

On peut faire le calcul directement ou utiliser le théorème de Pythagore  $\|f - p_F(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_F(f)\|^2$ .

### EXERCICE 3

1) Soit  $u_n = \sqrt[3]{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 2}$ . On a

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^3 + n + 1} &= n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \\ &= n \left( 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)^{1/3} \\ &\stackrel{+}{\equiv} n \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\stackrel{+}{\equiv} n \left( 1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\stackrel{+}{\equiv} n + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 2} &= n \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} \\ &= n \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right)^{1/2} \\ &\stackrel{+}{\equiv} n \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\stackrel{+}{\equiv} n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

donc

$$u_n \stackrel{+}{\equiv} \left( n + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \left( n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \stackrel{+}{\equiv} -\frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{3n}.$$

Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge, donc la série  $\sum u_n$  aussi (série à termes négatifs à partir d'un certain rang).

2) Posons  $u_n = \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2} = \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3(n+1)}{2(2n+1)}$$

qui tend vers  $\frac{3}{4} < 1$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série  $\sum u_n$  converge.

3) Posons  $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ . On fait un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln n + a \ln \left( n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) + b \ln \left( n \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \right) \\ &= \ln n + a \ln n + a \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + b \ln n + b \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \\ &\stackrel{+}{\equiv} (a+b+1) \ln n + a \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + b \left( \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\stackrel{+}{\equiv} (a+b+1) \ln n + \frac{2a+b}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

- Si  $a + b + 1 \neq 0$  alors  $u_n \sim (a + b + 1) \ln n$  donc la série diverge grossièrement.
- Si  $a + b + 1 = 0$  et  $a + 2b \neq 0$  alors  $u_n \sim \frac{2a + b}{2n}$  donc la série diverge puisque la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.
- Si  $a + b + 1 = 0$  et  $a + 2b = 0$ , i.e. si  $a = -2$  et  $b = 1$ , alors  $u_n \stackrel{+}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série converge.

Calculons la somme de la série dans ce dernier cas. La somme partielle d'ordre  $p$  de la série est

$$\begin{aligned}
 S_p &= \sum_{n=1}^p (\ln n - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)) \\
 &= \sum_{n=1}^p \ln n - 2 \sum_{n=1}^p \ln(n+1) + \sum_{n=1}^p \ln(n+2) \\
 &= \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln p - 2(\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln p + \ln(p+1)) + \ln 3 + \dots + \ln p + \ln(p+1) + \ln(p+2) \\
 &= \ln 2 - \ln(p+1) + \ln(p+2) \\
 &= \ln 2 + \ln \frac{p+2}{p+1}.
 \end{aligned}$$

Or  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln \frac{p+2}{p+1} = 0$  donc la somme de la série est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = \ln 2.$$

4) On a  $\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{5}{n^2}$  et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge donc la série  $\sum u_n$  aussi (séries à termes positifs).

On décompose en éléments simples :

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}.$$

La somme partielle d'ordre  $p$  de la série est donc

$$\begin{aligned}
 S_p &= \sum_{n=1}^p \left( \frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} \right) \\
 &= 3 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n+1} - 2 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n+2} \\
 &= 3 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \right) - 2 \left( \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} \right) \\
 &= 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2} \\
 &= 4 - \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2}.
 \end{aligned}$$

La somme de la série est donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = 4.$$