

Devoir n°2 (non surveillé)

EXERCICE 1

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul. Calculer

$$\sum_{k=0}^n k(n-k).$$

On essaiera de factoriser le plus possible le résultat.

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$.

1) On considère les fonctions f , g et h définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \quad \text{et} \quad h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.$$

- Étudier les variations de f et en déduire qu'elle est à valeurs positives.
 - Étudier les variations de g et en déduire qu'elle est à valeurs positives.
 - Étudier les variations de h et en déduire qu'elle est à valeurs positives.
 - En déduire que, pour tout réel positif x , on a l'encadrement $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
- 2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \leq S_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$.
- 3) Montrer finalement que la suite de terme général S_n est convergente et déterminer sa limite.